2^{nde} : TD (développements-factorisations)

Solutions :

I

1. Développer : $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=\sqrt{3}^2-\sqrt{2}^2=3-2=\boxed{1}$
2. En utilisant l'identité remarquable $(a+b)^2$, développer $(a+b)^3$. $(a+b)^3=(a+b)(a+b)^2=(a+b)\left(a^2+2ab+b^2\right)$
$a^3+a\times 2ab+ab^2+ba^2+b\times 2ab+b^3={}^3+2a^2b=ab^2+a^2b++2ab^2+b^3=\boxed{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}$
3. En déduire le développement de $(a-b)^3$.
On remarque que $a-b=a+(-b)$; il suffit donc de remplacer b par $-b$ dans l'expression précédente.
On en déduit :
$\boxed{(a-b)^3=a^3-3a^2b+ab^2-b^3}$.
4. Développer $(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$ On obtient : $a^3+a^2b+ab^2-ba^2-ab^2-b^3=\boxed{a^3-b^3}$
5. Pour tous nombres a, b et c, on obtient : $\boxed{ab-ac+bc-ab+ac-bc=0}$;

II

Développer les expressions suivantes :

A $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)=\sqrt{x}^2-\sqrt{y}^2=\boxed{x-y}$

B $\left(x^2+y^2\right)^2=(a+b)^2$ avec $a=x^2$ et $b=y^2$.
D'où $\left(x^2+y^2\right)^2=(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=\left(x^2\right)^2+2x^2y^2+\left(y^2\right)^2=\boxed{x^4+2x^2y^2+y^4}$

C Pour tout $x\neq 0$, $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2+2\times x\times\dfrac{1}{x}\times\left(\dfrac{1}{x}\right)^2=\boxed{x^2+2+\dfrac{1}{x^2}}$

III

Factoriser les expressions suivantes :

$A(x)=(2x+7)(x-1)-(4x+14)(3x-5)=(2x+7)(x-1)-2(2x+7)(3x-5)=(2x+7)[(x-1)-2(3x-5)]=$
$(2x+7)(x-1-6x+10)=\boxed{(2x+7)(-5x+9)}$

$B(x)=(2x-3)(4x-7)+(3-2x)(5x-1)=(2x-3)(4x-7)+(-1)(2x-3)(5x-1)$
$=(2x-3)\left[(4x-7)-(5x-1)\right]=(2x-3)(4x-7-5x+1)=\boxed{(2x-3)(-x-6)}$

En effet : $(-1)(2x-3)=-2x+3=3-2x$ donc $3-2x$ et $2x-3$ sont des nombres opposés.

$C(x)=(x-1)(2+x)+(x+5)(1-x)=(x-1)(2+x)-(x+5)(x-1)=(x-1)\left[(2+x)-(x+5)\right]=(x-1)(2+x-x-5)$
$=\boxed{-3(x-1)}$

$D(x)=x^3+x^2+x+1=x^2(x+1)+x+1=\boxed{(x+1)\left(x^2+1\right)}$