FONCTIONS POLYNÔMES DE DEGRÉ DEUX-FONCTIONS HOMOGRAPHIQUES

Table des matières

I Fonction polynôme du second degré

I.1 Définitions

Définition

On appelle fonction **polynôme du second degré** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

o˘ a, b et c sont des réels appelés coefficients avec $a \neq 0$.

Exemples : Exemples de fonctions polynômes du second degré

fonctions polynôme de degré 2	coefficients
$f(x) = 2x^2 - 5x + 3$	$a = 2$, $b = -5$, $c = 3$
$f(x) = -x^2 + 3$	$a = -1$, $b = 0$, $c = 3$
$f(x) = -7x^2 + 3x$	$a = -7$, $b = 3$, $c = 0$

Définition

L'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.
Cette forme est appelée **forme canonique**

Démonstration :
$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x\right) + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2\right] + c = a\left(x - \left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a} + c = \boxed{a(x-\alpha) + \beta}$ en posant $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$; on a alors $\beta == -\dfrac{b^2}{4a} + c = f(\alpha)$, car en remplaçant x par α dans $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, on trouve β.

Exemples :

1. Soit $f(x)=2x^2-4x+5=ax^2+bx+c$ avec $a=2$, $b=-4$ et $c=5$.
   On a $\alpha=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-4}{2\times 2}=1$
   $\beta=f(\alpha)=f(1)=3$
   far conséquent $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta=2(x-1)^2+3$.
2. $f(x)=-5x^2+2x-7=ax^2+bx+c$ avec $a=-5$, $b=2$ et $c=-7$.
   $\alpha=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{2}{2\times(-5)}=\dfrac{1}{5}$
   $\beta=f(\alpha)=f\left(\dfrac{1}{5}\right)=-5\times\left(\dfrac{1}{5}\right)^2+2\times\dfrac{1}{5}-7=-\dfrac{34}{5}$.
   On en déduit $f(x)=-5\left(x-\dfrac{1}{5}\right)^2-\dfrac{34}{5}$

Remarque : $\beta=f(\alpha)$ peut facilement se calculer à la calculatrice !

I.2 Variations et représentation graphique

Propriété

La fonction polynôme de degré 2 définir sur $\mathbb{R}$ est :

- strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,\alpha]$ puis strictement croissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$ **si** $a>0$,
- strictement croissante sur $]-\infty\,;\,\alpha]$puis strictement décroissante $[\alpha\,;\,+\infty[$ **si** $a<0$,

Démonstration dans le cas $a>0$: Sur $[\alpha\,;\,+\infty[$:

On prend deux nombres x_1 et x_2 avec $\alpha\leqslant x_1\leqslant x_2$.
$\alpha\leqslant x_1\leqslant x_2\Rightarrow 0\leqslant x_1-\alpha\leqslant x_2-\alpha\Rightarrow 0\leqslant (x_1-\alpha)^2\leqslant (x_2-\alpha)^2$ (car la fonction carré est croisante sur $[0\,;\,+\infty[$)

On en déduit $0\leqslant 0\leqslant a(x_1-\alpha)^2\leqslant a(x_2-\alpha)^2$ puis $\beta\leqslant a(x_1-\alpha)^2+\beta\leqslant a(x_2-\alpha)^2\,\beta$.

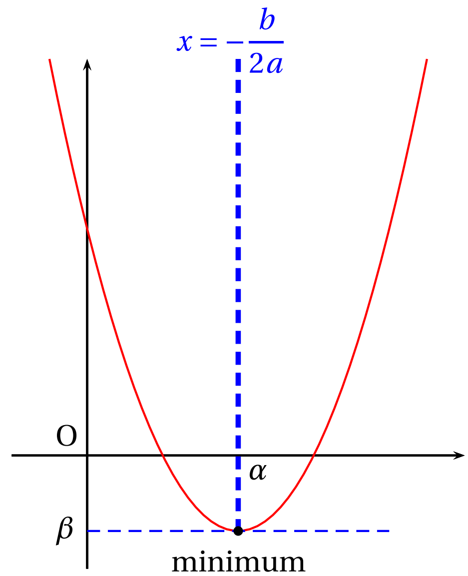
Les images sont classées sdan sel même ordre que les antécédents, donc la fonction f est croissante sur $[\alpha+\infty[$.

Démonstration analogue sur $]-\infty\,;\,\alpha]$ et dans le cas où $a<0$

Tableau de variations et représentation graphique :

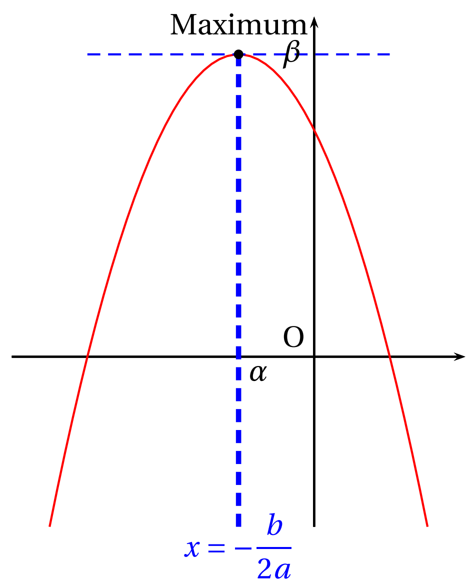
$\boxed{a > 0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$



$\boxed{a < 0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$-\infty$



Dans un repère $\left(O ; \vec{i} ; \vec{j}\right)$, la courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2 est une **parabole**
Cette parabole admet un **axe de symétrie** parallèle à l'axe des ordonnées.

Remarque : pour calculer $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, on effectue plusieurs transformations successives :
$x \longmapsto (x-\alpha)^2 \longmapsto a(x-\alpha)^2 \longmapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$.
La première transformation correspond à une translation parallèlement à l'axe des abscisses de α unités ; la deuxième, multiplication par a, correspond à une dilatation (et un renversement si $a < 0$) et la troisième à une translation parallèlement à l'axe des ordonnées de β unités.

II Fonctions homographiques

II.1 Définition

Définition

On appelle fonction homographique toute fonction de la forme $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ où a, b, c et d sont des réels avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.

Propriété

L'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

Exemple : soit $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{7x+3}$.
f est bien homographique et l'ensemble de définition est $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{7}\right\}$.

Définition

La courbe représentative d'une fonction homographique est une hyperbole, constituée de deux branches.

Pour la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{7x+3}$, la courbe représentative est :