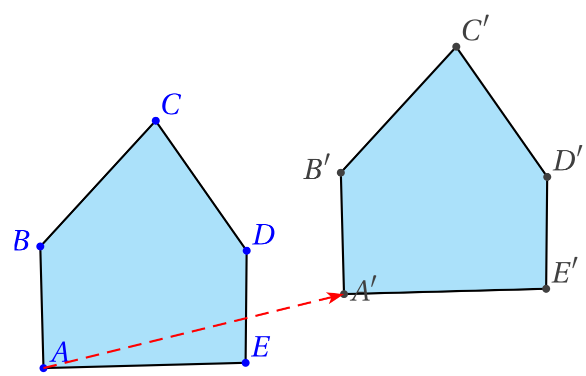
Vecteurs et translations

Table des matières

I Translations

On considère un pentagone dont les cinq sommets sont A, B, C, D, E. On le déplace en le faisant glisser de façon à ce qu'il garde la même orientation par rapport à la feuille de papier ou au tableau. Le sommet A vient en A', B vient en B' et C vient en C', etc.



On dit qu'on a effectué une **translation** du pentagone. Faire subir une **translation** à un objet revient à le faire glisser en gardant la même orientation.

II Vecteur d'une translation

Remarque : Dire qu'on a fait glisser la figure ou qu'on lui a fait subir une translation est **insuffisant**. On ne sait pas où la figure est arrivée !
Il faut préciser davantage.

Définition

En fait, puisque la figure reste inchangée et qu'elle garde la même orientation, il suffit de donner le déplacement d'un seul point de la figure.
Par exemple, il suffit de dire que A va en A' pour pouvoir construire le polygone A'B'C'D'E'. On dit que l'on a effectué une translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$

Remarque : on aurait pu dire que B allait en en B' ou C en C'. La figure a donc aussi subi une translation de vecteur $\overrightarrow{BB'}$ ou $\overrightarrow{CC'}$ etc.

Représentation : Si $A \neq A'$, le vecteur $\overrightarrow{AA'}$ se représente par une flèche d'origine A et d'extrémité A'.

Vocabulaire

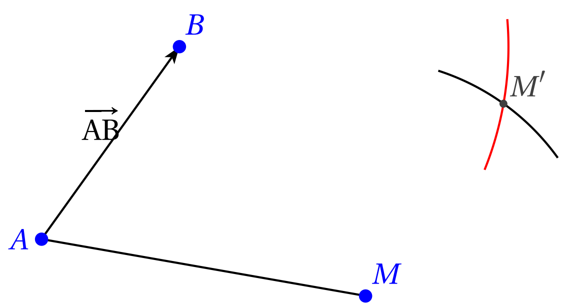
Deux droites ont la même **direction** lorsqu'elles sont parallèles. Deux voitures qui roulent sur une même route rectiligne vont dans la même direction ; elles peuvent aller dans le même **sens** ou dans des **sens** contraires. Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par sa **direction**, son **sens** et sa **longueur** AB.

Définition

L'image d'un point M par une tran slation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un point M' tel que :

- les droites (AA') et (MM') ont la même **direction** (c'est à dire sont parallèles) ;
- les demi droites [AA') et [MM') ont le même **sens** ;
- les segments [AA'] et [MM'] ont la même longueur ; AA' = MM'

L'image M' d'un point M par une translation de vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ se construit au compas.



On trace l'arc de cercle de centre B et de rayon AC (car nous devons avoir $AC = BD$).
On trace l'arc de cercle de centre C et de rayon AB (car nous devons avoir $CD = AB$).

III Egalité de vecteurs

Deux vecteurs sont égaux s'ils correspondent à la même translation.
D'après ce qu'on a vu auparavant, on en déduit la définition suivante ;

Définition

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si :

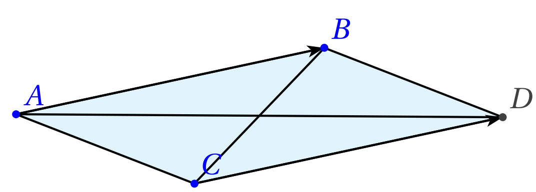
- les droites (AB) et (CD) sont parallèles ;
- les demi-droites [AB) et [CD) ont le même sens :
- les longueurs AB et CD sont égales.

On écrit alors : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

Soient deux vecteurs **égaux** $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. D'après ce qu'on a vu, les segments [AB] et [CD] sont alors parallèles et de même longueur : on en déduit que le quadrilatère ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati).
Remarque : sur la figure du I, on a : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{EE'}$.

Propriété

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement si, ABDC et un parallélogramme (éventuellement aplati).
Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement si, [AD] et [BC] ont le même milieu.



Remarque : si l'on ne veut pas préciser les extrémités du vecteur, on lui donne un nom avec une seule lettre, par exemple le vecteur $\overrightarrow{u}$.

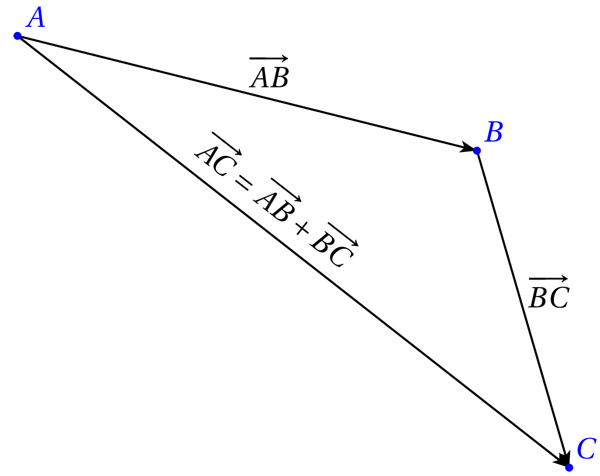
Propriétés

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ si, et seulement si B = C.
- K est le milieu du segment [AB] si, et seulement si, $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KB}$

Exercice : Soient ABCD et ABEF deux parallélogrammes.

1. Faire une figure.
2. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et DC ? Y a-t-il un autre vecteur égal au vecteur $\overrightarrow{AB}$?
3. Conclure.

IV Somme de deux vecteurs



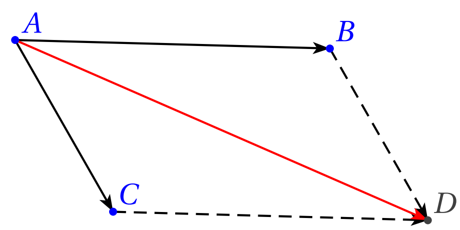
Le point B est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Le point C est l'image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. On applique **successivement** les deux translations. Cela revient à n'en appliquer qu'une seule (on va directement de A en C, sans passer par B). Cette translation qui permet de passer de A en C est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$. Ainsi définit-on une définition sur les vecteurs.

Propriété (relation de Chasles)

Pour tous points A, B et C, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Remarque : Le segment d'extrémités A et C est la diagonale du parallélogramme dont $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont deux côtés consécutifs.

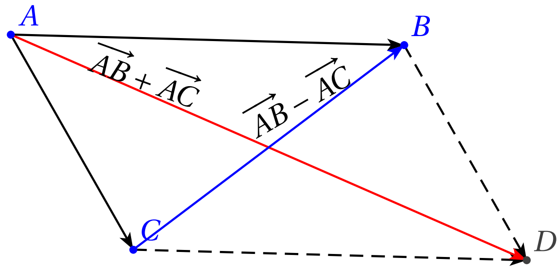
Somme de deux vecteurs de même origine : On veut construire la somme de deux vecteurs de même origine $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.



On introduit le point D tel que ABDC soit un parallélogramme ($\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$). Ce point se construit au compas, puisque l'on doit avoir AB = CD et AC = BD. Alors : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ (**relation de Chasles**).

Remarque : En appliquant la relation de Chasles, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$. Une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie d'une translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ correspond à une translation de vecteur $\overrightarrow{AA}$, qui laisse tous les points immobiles ; on parle alors de translation de **vecteur nul**, noté $\overrightarrow{0}$. Par conséquent : $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \cdots = \overrightarrow{0}$.
Comme $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$, par analogie avec l'addition sur les nombres, on pose $\boxed{\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BA}}$.

Exemple : Soit ABDC un parallélogramme. On a vu précédemment que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$. On voudrait représenter également $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$. On a : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \boxed{\overrightarrow{CB}}$ en appliquant la relation de Chasles. On remarque que l'on obtient l'autre diagonale du parallélogramme.

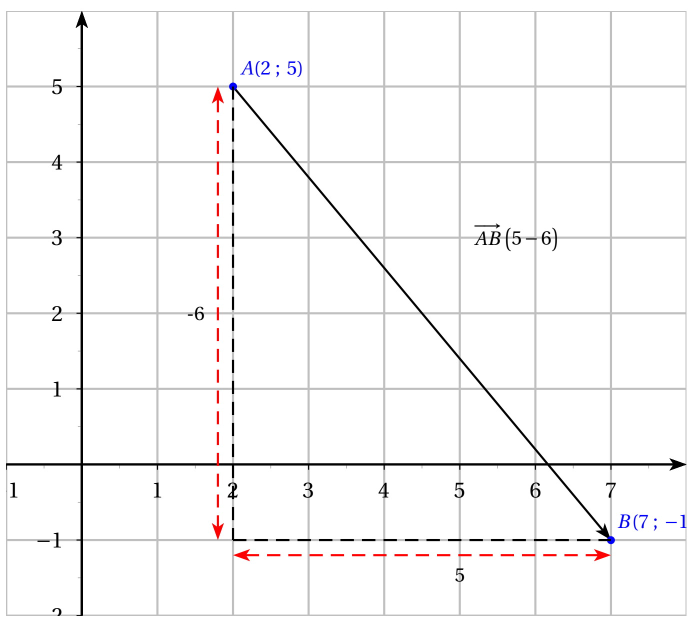


V Coordonnées d'un vecteur

Définition

Soit $\left(O\,;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$ un repère quelconque. Soient deux points $A\left(x_A\ ;\ y_A\right)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$ et l'on écrit : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

Remarque : Les coordonnées d'un vecteur servent à indiquer de combien d'unités on se déplace parallèlement à chaque axe.



Remarque : deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées.

Application : Déterminer les coordonnées du quatrième point d'un parallélogramme :
Soient A(2 ; 3) , B(3 ; 4) et C(5 ; 6). On cherche les coordonnées de D tel que ABCD soit un parallélogramme.
ABCD est un parallélogramme si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux.
On note $D\left(x_D\ ;\ y_D\right)$ les coordonnées de D.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 5 - x_D \\ 6 - y_D \end{pmatrix}$. On obtient un système de deux équations :
$\{\ 5 - x_D = 16 - y_D = 1$.
$x_D = 4$ et $y_D = 5$. donc $D(4\ ;\ 5)$.

VI Longueur d'un segment

Propriété

Soit $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ un repère **orthonormal**. Soient A$\left(x_A\,;\,y_A\right)$ et B$\left(x_B\,;\,y_B\right)$. Alors :

$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+\left(y_B-y_A\right)^2}$.

Démonstration : on a déjà vu cette formule ; elle est basée sur l'application du théorème de Pythagore.

Remarque : (x_1-x_B) et $\left(y_B-y_A\right)$ sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exemple : $A(2\,;\,-5)$ et $B(-7\,;\,1)$.

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-9\\6\end{pmatrix}$.

$AB=\sqrt{(-9)^2+6^2}=\sqrt{81+36}=\sqrt{117}$

VII Multiplication d'une vecteur par un réel

Définition

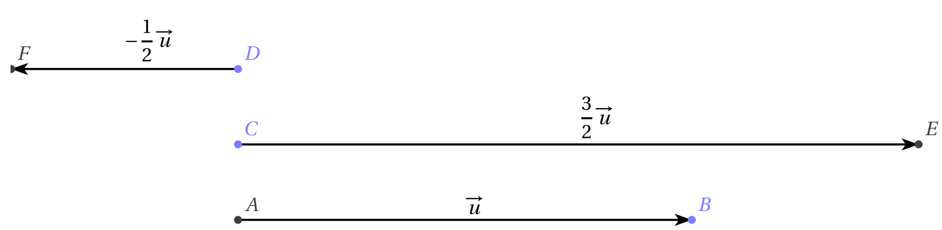
Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un vecteur et soit k un réel.

Le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$ est noté $k\vec{u}$.

Remarque :

- Les vecteurs $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont la même direction.
- Si $k>0$, $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont le même sens. Si $k<0$, les deux vecteurs sont de sens contraire.
- La longueur de $k\vec{u}$ est k fois celle de $\vec{u}$ si $k>0$, $-k$ foix celle de $\vec{u}$ si $k<0$.

Exemple :



VIII Vecteurs colinéaires

VIII.1 Définition et caractérisation

Définition

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{v}=k\vec{u}$

Propriété

Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, leurs coordonnées sont proportionnelles

En effet : les deux vecteurs sont colinéaires si, et seulement si, $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.
Si $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}$ $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$, cela se traduit par $\left\{ \begin{array}{l} x" = kx \\ y' = ky \end{array} \right.$, donc les coordonnées sont bien proportionnelles.

Propriété (condition de colinéaires)

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $xy' - x'y = 0$

Exemples :

1. Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix}$.
   Il est clair que $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{u}$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
2. Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \sqrt{3}+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3}-\sqrt{2} \end{pmatrix}$.
   On applique la condition de colinéaires :
   $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) - 1 \times 1 = \sqrt{3}^2 - \sqrt{2}^2 - 1 = 2 - 2 - 1 = 0$ donc $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.

VIII.2 Application à la géométrie

Théorème

Soient trois points A, B et C deux à deux distincts.
A, B et C sont alignés si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemple : soient A(2 ; 5), B(3 ; 8) et C(-5 ; -16).
Montrer que ces trois points sont alignés.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -7 \\ -21 \end{pmatrix}$.
Il est clair que $\overrightarrow{AC} = -7\overrightarrow{AB}$ donc ces vecteurs sont colinéaires.
Les trois points A, B et C sont bien alignés.

Théorème

Soient quatre points A, B, C et D deux à deux distincts.
Les droites (AB) et (BC) sont parallèles si, et seulement si, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Exemple : soient A(1 ; 3), B(5 ; -2), C(-1 ; 6) et D7 ; -4).
Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 8 \\ -10 \end{pmatrix}$.
On remarque que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$.
Les deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, donc les droites (AB) et (CD) sont parallèles.