Inéquations

Table des matières

I Définition

Définition

Une inéquation est une inégalité comportant une ou plusieurs nombres inconnu
Résoudre une inéquation consiste à trouver toutes les valeurs possibles que peuvent prendre ces nombres inconnus pour obtenir une inégalité vraie.

II Signe de l'expression $ax+b$

On considère l'expression $ax+b$ avec $a \neq 0$.

- $ax+b=0 \iff x=-\dfrac{b}{a}$.
- $ax+b>0 \iff ax>-b$.

Si $a>0$, $ax>-b \iff x>-\dfrac{b}{a}$

Si $a<0$, $ax>-b \iff x<-\dfrac{b}{a}$

(car l'inégalité change de sens quand on divise les deux membres par un nombre négatif)

- $ax+b<0 \iff ax<-b$.

Si $a>0$, $ax<-b \iff x<-\dfrac{b}{a}$

Si $a<0$, $ax<-b \iff x<-\dfrac{b}{a}$

(car l'inégalité change de sens quand on divise les deux membres par un nombre négatif)

On récapitule cela dans un tableau de signes :

Nous avons deux cas possibles :

$\boxed{a > 0}$

x	$-\infty$ $\quad -\frac{b}{a}$ $\quad +\infty$
Signe de $ax+b$	$-$ $\quad 0$ $\quad +$

$\boxed{a < 0}$

x	$-\infty$ $\quad -\frac{b}{a}$ $\quad +\infty$
Signe de $ax+b$	$+$ $\quad 0$ $\quad -$

En résumé, on obtient :

x	$-\infty$ $\quad -\frac{b}{a}$ $\quad +\infty$
Signe de $ax+b$	Signe de $-a$ $\quad 0$ $\quad$ Signe de a

Exemples :

a) Trouver en fonction de x le signe de $3x+4$. $3x+4$ s'annule pour $x = -\frac{4}{3}$.
Le coefficient 3 est positif, donc on a :

x	$-\infty$ $\quad -\frac{4}{3}$ $\quad +\infty$
Signe de $3x+4$	$-$ $\quad 0$ $\quad +$

b) Trouver en fonction de x le signe de $-2x+5$. $-2x+5$ s'annule pour $x = \frac{5}{2}$
Le coefficient -2 est négatif, donc on a :

x	$-\infty$ $\quad \frac{5}{2}$ $\quad +\infty$
Signe de $-2x+5$	$+$ $\quad 0$ $\quad -$

III Signe d'un produit

Méthode :
On étudie le signe de chaque facteur du produit, on renseigne un tableau de signes et on conclut dans le tableau en appliquant la règle du signe d'un produit.

Exemple :
Déterminer le signe de l'expression $A(x) = (2x+3)(5x-4)$.

- $2x+3=0 \iff x = -\frac{3}{2}$
- $5x-4=0 \iff x = \frac{4}{5}$
- On renseigne un tableau de signes :

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$		$\frac{4}{5}$	$+\infty$
Signe de $2x+3$	$-$	0	$+$		$+$
Signe de $5x-4$	$-$		$-$	0	$+$
Signe de $(2x+3)(5x-4)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Conclusion :

- $(2x+3)(5x-4) < 0$ pour $x \in \left]-\frac{3}{2}\,;\,\frac{4}{5}\right[$

- $(2x+3)(5x-4)=0$ pour $x=-\dfrac{3}{2}$ ou $x=\dfrac{4}{5}$
- $(2x+3)(5x-4)>0$ pour $x\in\left]-\infty-\dfrac{3}{2}\right[\cup\left]\dfrac{5}{4}\,;\,+\infty\right[$

IV Inéquations se ramenant à un produit

Exemple : Résoudre $x^2-7x<(5-x)(x-7)$

Méthode : on se ramène à une inéquation du type A(x) < 0, puis on factorise.
$x^2-7x<(5-x)(x-7) \iff x^2-7x-(5-x)(x-7)<0 \iff x(x-7)-(5-x)(x-7)<0$
$\iff (x-7)[x-(5-x)]<0 \iff (x-7)(2x-5)<0$

- $x-7=0 \iff x=7$
- $2x-5=0 \iff x=\dfrac{5}{2}$

On renseigne un tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		7		$+\infty$
Signe de $x-7$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $2x-5$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $(x-7)(2x-5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

V Inéquations sous forme de quotients

Exemple : Résoudre l'inéquation $\dfrac{-3x+5}{x+1}\geqslant 2$.

Méthode : On commence par chercher l'ensemble de définition, puis on se ramène à une comparaison à 0. On factorise et enfin, on renseigne un tableau de signes.

- L'ensemble de définition est : $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.
- Pour $x\in\mathscr{D}$, $\dfrac{-3x+5}{x+1}\geqslant 2 \iff \dfrac{-3x+5}{x+1}-2\geqslant 0 \iff \dfrac{(-3x+5)-2(x+1)}{x+1}\geqslant 0 \iff \dfrac{-5x+3}{x+1}\geqslant 0.$
- $-5x+3=0 \iff x=\dfrac{3}{5}$
- $x+1=0$ pour $x=-1$
- Tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
Signe de $-3x+5$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
Signe de $x+1$		$-$	‖	$+$	|	$+$	
Signe de $(-3x+5)(x+1)$		$-$	‖	$+$	0	$-$	

On en déduit que l'ensemble des solutions est : $\mathscr{S}=]-\infty\,;\,-1[\cup\left[\dfrac{5}{3}\,;\,=\infty\right[$.