

# Fonctions affines

## Table des matières

I	Définition : . . . . .	1
II	Variations . . . . .	1
III	Caractérisation d'une fonction affine . . . . .	2
IV	Comment tracer graphiquement la représentation graphique d'une fonction affine ? . . . . .	3
IV.1	À partir de deux points : . . . . .	3
IV.2	En utilisant le coefficient directeur . . . . .	4

## I Définition :



### Définition

Une fonction  $f$ , définie sur  $\mathbb{R}$ , est affine s'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tel que, pour tout  $x$ ,  $f(x) = ax + b$ .



### Propriété

Soit  $f : x \mapsto ax + b$  une fonction affine. La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.  $a$  est le coefficient directeur et  $b$  l'ordonnée à l'origine, c'est-à-dire que la droite passe par le point de coordonnées  $(0 ; b)$ .

## II Variations



### Théorème

Soit  $f$  une fonction affine définie par :  $f(x) = ax + b$ .

- $f$  est croissante si, et seulement si,  $a > 0$ .
- $f$  est constante si, et seulement si,  $a = 0$ .
- $f$  est décroissante si, et seulement si,  $a < 0$ .

**Démonstration :** Soient deux nombres quelconques  $x_1$  et  $x_2$ , avec  $x_1 < x_2$ .  $f(x_2) - f(x_1) = (ax_2 + b) - (ax_1 + b) = ax_2 - ax_1 = a(x_2 - x_1)$ . Comme  $x_2 - x_1$  est positif, puisque, par hypothèse,  $x_1 < x_2$ ,  $f(x_2) - f(x_1)$  est du signe de  $a$ , donc positif si  $a > 0$  ( $f$  est alors croissante), constant si  $a = 0$  et négatif si  $a < 0$ . Si  $a > 0$ ,  $x_1 < x_2$  entraîne que  $f(x_1) < f(x_2)$ , donc  $f$  respecte l'ordre et  $f$  est croissante. Si  $a = 0$ ,  $f$  est constante, car, pour tout  $x$ ,  $f(x) = 0x + b = b$ . Si  $a < 0$ ,  $x_1 < x_2$  entraîne que  $f(x_1) > f(x_2)$ , donc  $f$  renverse l'ordre et  $f$  est décroissante.

**Remarque :** Soit  $f : x \mapsto ax + b$  une fonction affine, avec  $a \neq 0$ .  $f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$ . On en déduit les tableaux de variations possibles de  $f$ , selon le signe de  $a$ .

On en déduit les tableaux de variation (selon le signe de  $a$ )

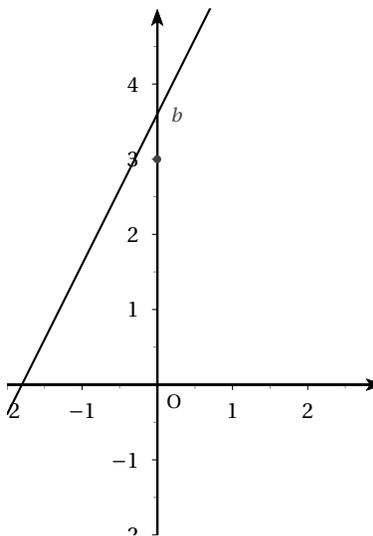
Pour  $a > 0$  :

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$			

Pour  $a < 0$  :

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$			

**Remarque :** la représentation graphique d'une fonction affine  $f r : x \mapsto ac + b$  est une droite.  $b$  est l'ordonnée à l'origine. On a  $b = f(0)$   $a$  est le coefficient directeur.



Interprétation graphique de  $b$  :

### III Caractérisation d'une fonction affine

#### Théorème

$f$  est une fonction affine si, et seulement si, l'accroissement  $\Delta y$  de l'image est proportionnel à l'accroissement  $\Delta x$  de la variable. Autrement dit,  $x_1$  et  $x_2$  étant deux réels distincts,  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$  où  $a$  est un nombre constant.

**Démonstration :** Si  $f$  est une fonction affine,  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$ .

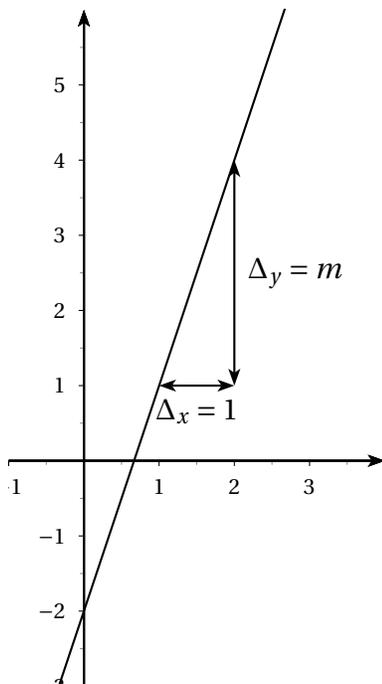
**Réciproque :** Soit  $f$  une fonction telle que, pour tous  $x_1$  et  $x_2$ ,  $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = a$ . Alors, en particulier, pour  $x$  et 0, on a :  $\frac{f(x) - f(0)}{x} = a$  d'où, en posant  $f(0) = b$ ,  $f(x) = ax + b$ .

Application : on connaît les images de deux nombres par une fonction affine erg l'on veut l'image d'un troisième nombre, sans trouver l'expression de la fonction affine :

$x$	2	4	7
$f(x)$	-1	5	

Puisque  $f$  est affine, on a :  $\frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = \frac{f(7) - f(2)}{7 - 2}$  donc  $\frac{5 - (-1)}{4 - 2} = \frac{f(7) - (-1)}{7 - 2}$ , soit  $\frac{6}{2} = \frac{f(7) + 1}{5}$ . Par conséquent :  $3 = \frac{f(7) + 1}{5}$  donc  $f(7) + 1 = 3 \times 5 = 15$  d'où  $f(7) = 15 - 1 = 14$  :  **$f(7) = 14$** .

**Interprétation graphique de  $m$**  :  $m = \frac{\Delta_y}{\Delta_x}$  donc  $\Delta_y = m\Delta_x$ . Si l'on prend  $\Delta_x = 1$ , on a  $\Delta_y = m$ . Autrement dit : si l'on se déplace de 1 unité parallèlement à l'axe des abscisses, on se déplace en même temps de  $m$  parallèlement à l'axe des ordonnées.



**Remarque** : si l'on se déplace de  $k$  unités parallèlement à l'axe des abscisses, on se déplace dans le même temps de  $km$  unités parallèlement à l'axe des ordonnées.

On peut facilement visualiser l'influence des deux paramètres, coefficient directeur et ordonnée à l'origine, à l'aide d'un ordinateur. On peut par exemple voir les deux fichiers suivants qui montrent ce qui se passe quand on fait varier l'ordonnée à l'origine pour le premier, le coefficient directeur pour le second. (Il faut avoir Java sur son ordinateur).

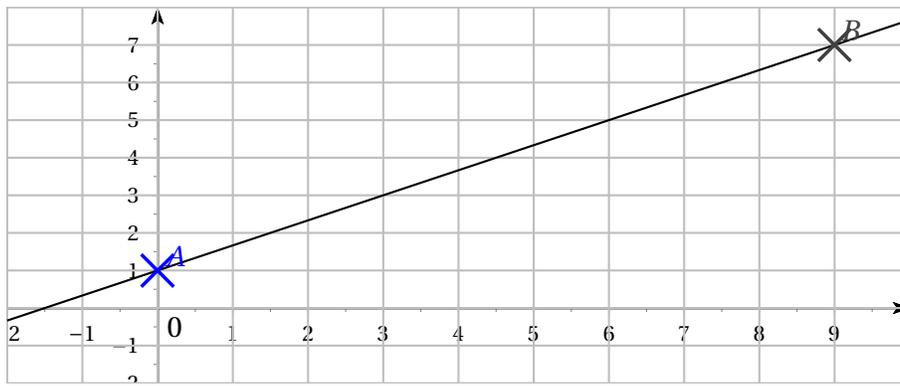
- cliquer sur [variations de l'ordonnée à l'origine](#)
- [variations du coefficient directeur](#)

## IV Comment tracer graphiquement la représentation graphique d'une fonction affine ?

### IV.1 À partir de deux points :

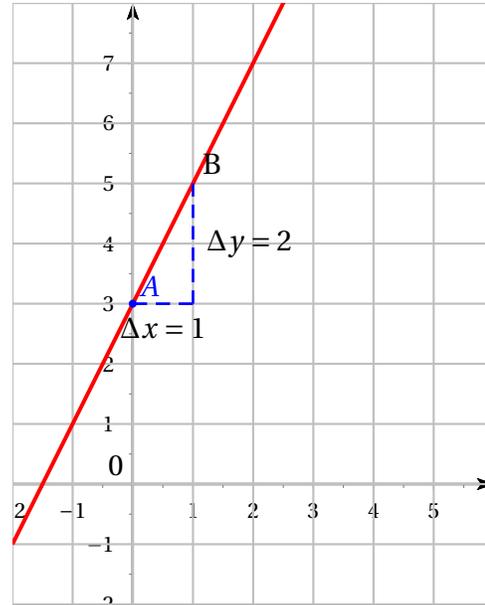
**Exemple** : on veut représenter graphiquement la fonction affine  $f : x \mapsto \frac{2}{3}x + 1$ . On sait que la représentation graphique de  $f$  est une droite. Pour tracer une droite, il suffit de connaître deux points de celle-ci. On calcule alors les coordonnées de deux points de cette droite, en essayant d'avoir des coordonnées entières, pour qu'elles soient faciles à placer. L'ordonnée à l'origine vaut 1, donc la droite passe par le point de coordonnées  $(0 ; 1)$ . On remarque qu'il suffit de prendre  $x$  multiple de 3 ( $x$  pas trop proche de 0, pour accroître la précision du tracé.) On remplit un tableau :

x	0	9
$y = \frac{2}{3}x + 1$	1	$\frac{2}{3} \times 9 + 1 = 7$



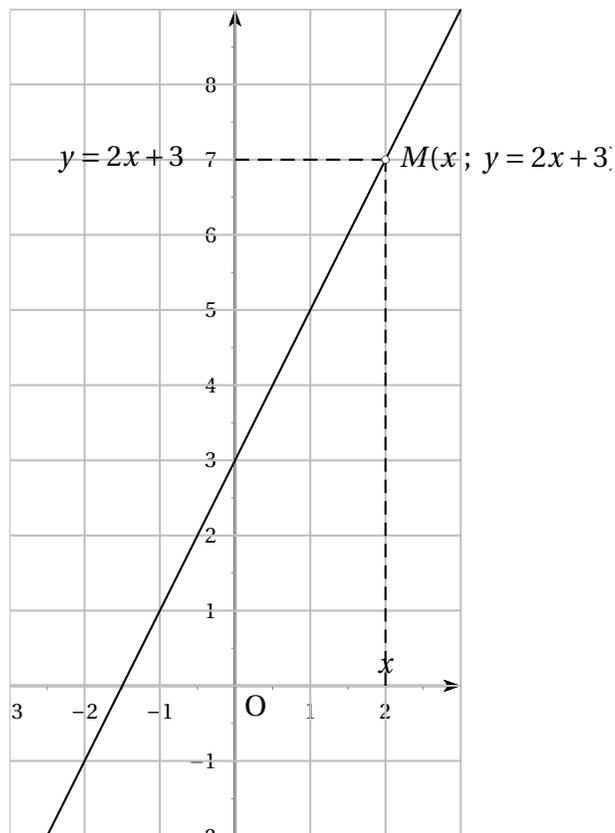
## IV.2 En utilisant le coefficient directeur

**Exemple :** représenter graphiquement la fonction affine  $x \mapsto 2x + 3$ . L'ordonnée à l'origine est 3, donc la droite passe par le point A de coordonnées (0 ; 3). Le coefficient directeur est 2, donc  $2 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ , c'est-à-dire  $\Delta y = 2\Delta x$ . On choisit par exemple  $\Delta x = 1$  ; on obtient alors  $\Delta y = 2 \times 1 = 2$ . En partant de A, on se déplace de 1 en abscisses, et alors de 2 en ordonnées.



**Remarque :** La représentation graphique d'une fonction affine  $f \mapsto ax + b$  est une droite (sécante à l'axe de l'axe des ordonnées ( $Oy$ )) ; on dit que cette droite a pour **équation réduite**  $y = ax + b$ .

**Exemple :** La droite d'équation  $y = 2x + 3$  est la représentation graphique de la fonction  $f \mapsto 2x + 3$ .



**Exemple :** Trouver l'équation de la droite passant par les points A(2 ; 5) et B(7 ; -1). C'est la même chose que de chercher la fonction affine  $f$  vérifiant  $f(2) = 5$  et  $f(7) = -1$ . Notons  $m$  le coefficient directeur et  $p$  l'ordonnée à l'origine.  $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1 - 5}{7 - 2} = -\frac{6}{5}$ . L'équation de la droite est alors  $y = -\frac{6}{5}x + p$ . A appartient à la droite (AB) donc ses coordonnées vérifient cette équation :  $y_A = -\frac{6}{5}x_A + p$  donc  $5 = -\frac{6}{5} \times 2 + p$ . D'où  $-\frac{12}{5} + p = 5$  et  $p = 5 + \frac{12}{5} = \frac{25 + 12}{5} = \frac{37}{5}$ . L'équation de la droite (AB) est  $y = -\frac{6}{5}x + \frac{37}{5}$ .