

# Géométrie repérée

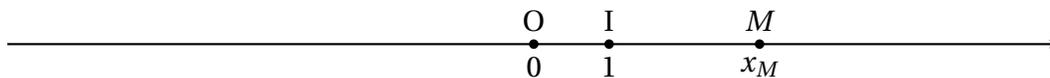
## Table des matières

I	Sur une droite	1
II	Repérage dans le plan	1
III	Coordonnées du milieu d'un segment	2
IV	Distance entre deux points	3
V	Liens Internet pour réviser	4

## I Sur une droite

### Définition

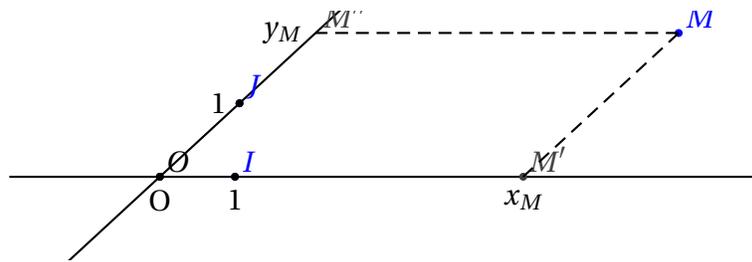
Soit une droite  $(d)$ . On la munit d'un repère  $(O ; I)$ .  
Alors, tout point  $M$  est repéré par un réel  $x$  appelé abscisse de  $M$ .  
; chaque point correspond une abscisse et ‡ chaque nombre correspond un point.  
L'ensemble des abscisses des points de la droite sont les nombres **réels**.



## II Repérage dans le plan

### Définition

Pour repérer un point dans le plan, on trace deux droites (**axes**) sécants en  $O$ , origine du repère. Sur un axe, on place un point  $I$  qui permet de définir un repère sur cet axe.  
De même, sur l'autre axe, on choisit un point  $J$  qui définit un repère sur cet axe.  
 $(O ; I ; J)$  définit alors un repère du plan.  
Soit  $M$  un point quelconque. On trace les parallèles aux axes passant par  $M$ ; elles coupent ces deux axes en  $M'$  et  $M''$ .  
 $M'$  est repéré par un nombre  $x_M$  et  $M''$  par un nombre  $y_M$ .  
On dit que  $x_M$  et  $y_M$  sont les coordonnées de  $M$  dans le repère  $(O ; I ; J)$ .  $x_M$  est l'abscisse de  $M$  et  $y_M$  l'ordonnée de  $M$ .  
On écrit :  $M(x_M ; y_M)$  ou  $M(x ; y)$



### Définition

Prendre des axes quelconques n'est pas toujours pratique. Quand on peut, on les prend perpendiculaires. Si les droites  $(OI)$  et  $(OJ)$  sont perpendiculaires, on dit que le repère  $(O; I; J)$  est **orthogonal**. Si le repère est orthogonal et que, de plus, les longueurs  $OI$  et  $OJ$  sont égales, on dit que le repère est **orthonormal** ou **orthonormé**.

### Propriétés

Deux points sont confondus si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées.

Exercices n° 1 et 2 page 221

Exercices n° 15; 16; 17; 19; 20; 21 page 230

## III Coordonnées du milieu d'un segment

### Définition

Soient deux points  $A(x_A; y_A)$  et  $B(x_B; y_B)$  deux points. Le milieu  $M$  du segment  $[AB]$  a pour coordonnées :  $x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$  et  $y_M = \frac{y_A + y_B}{2}$ .

#### Exemples d'application :

Exemple 1 Dans le plan muni d'un repère  $(O; I; J)$ , on considère les points  $A(-3; -1)$ ,  $B(5; -2)$ ,  $C(7; 3)$  et  $D(-1; 4)$ .

Montrer que  $ABCD$  est un parallélogramme.

#### Solution :

Notons  $K$  et  $L$  les milieux des deux diagonales  $[AC]$  et  $[BD]$ .

$$x_K = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-3 + 7}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ et } y_K = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{-1 + 3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$x_L = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{5 + (-1)}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ et } y_L = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{-2 + 4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$K$  et  $L$  sont les mêmes coordonnées donc  $K = L$ .

Les diagonales du quadrilatère  $ABCD$  ont le même milieu : **ABCD est un parallélogramme**.

Exemple 2 On considère les points A(2 ; 5), B(-1 ; 7) et C(11 ; 13).

On cherche les coordonnées du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

### Solution

On note  $x_D$  et  $y_D$  les coordonnées de D.

ABCD est un parallélogramme si, et seulement si, les diagonales [AC] et [BD] ont le même milieu.

Soit M le milieu de [AC] ; on a :

$$\begin{cases} x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{13}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = 9 \end{cases}$$

De même, les coordonnées du milieu de [AD] sont :

$$\begin{cases} \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{-1 + x_D}{2} \\ \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{7 + y_D}{2} \end{cases}$$

Les deux diagonales ont le même milieu, donc on doit avoir égalité entre les coordonnées :

Donc  $\frac{-1 + x_D}{2} = \frac{13}{2}$  d'où  $-1 + x_D = 13$ , donc  $x_D = 14$ .

$\frac{7 + y_D}{2} = 9$  donc  $7 + y_D = 18$  d'où  $y_D = 11$ .

D a pour coordonnées **D(14 ; 11)**.

## IV Distance entre deux points



### Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O ; I ; J).

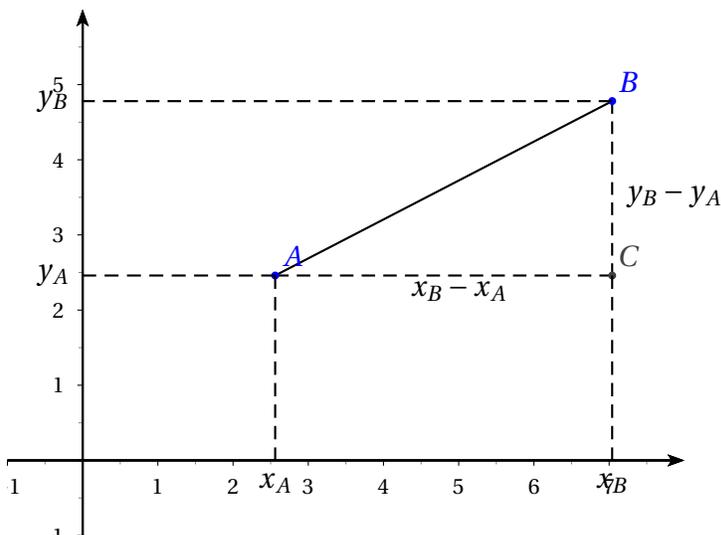
On considère les points A( $x_A$  ;  $y_A$ ) et B( $x_B$  ;  $y_B$ ).

Alors, la distance AB vaut :  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

### Démonstration :

Supposons que  $x_B > x_A$  et  $y_B > y_A$ .

Cette démonstration est basée sur le théorème de Pythagore.



Comme le repère est orthonormé, le triangle ABC est rectangle.

D'après le théorème de Pythagore, on a :  $AB^2 = AC^2 + BC^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$ .

Par conséquent :  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ .

On admet que cette démonstration est valable quelles que soient les positions de A et de B.

### Exercice :

Montrer que le point  $A(1 ; \sqrt{2})$  appartient au cercle de centre  $O$  et de rayon  $\sqrt{3}$ .

$$OA = \sqrt{(x_A - x_O)^2 + (y_A - y_O)^2} = \sqrt{1^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{1+2} = \sqrt{3}.$$

La longueur OA est égale au rayon du cercle donc A appartient au cercle.

### Exercice :

Soient  $A(1 ; -2)$  et  $B(4 ; 2)$ .

Montrer que B appartient au cercle de centre  $\mathcal{C}$  de centre A et de rayon  $\sqrt{5}$ .

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} = \sqrt{(4-1)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

B appartient bien au cercle de centre A et de rayon 5.

### Exercice :

Soient  $A(-2 ; -1)$ ,  $B(1 ; 3)$  et  $C(-3 ; 6)$ .

Démontrer que ABC est rectangle isocèle.

$$\bullet AB = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (3 - (-1))^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

$$\bullet BC = \sqrt{(-3 - 1)^2 + (6 - 3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\bullet AC = \sqrt{(-3 - (-2))^2 + (6 - (-1))^2} = \sqrt{(-1)^2 + 7^2} = \sqrt{1+49} = \sqrt{50}$$

•  $AB = BC$  donc ABC est isocèle.

$$\bullet AC^2 = \sqrt{50}^2 = 50; AB^2 + BC^2 = 5^2 + 5^2 = 25 + 25 = 50.$$

$AC^2 = AB^2 + BC^2$ . D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle.

Il est donc **isocèle rectangle en B**.

## V Liens Internet pour réviser

- Calculer les coordonnées du milieu d'un segment connaissant les coordonnées de ses extrémités
- Déterminer les coordonnées de l'image d'un point par une symétrie centrale
- Calculer la distance entre deux points de coordonnées fixées dans un repère orthonormal du plan
- Calcul des coordonnées du milieu d'un segment
- Calcul des coordonnées du quatrième sommet d'un parallélogramme