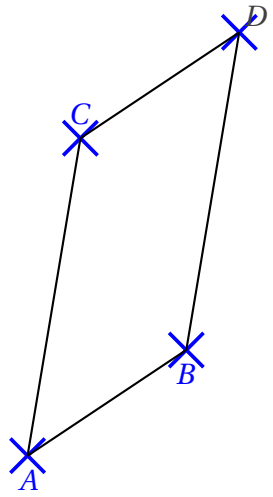
2nde : corrigé du contrôle sur les vecteurs (1 heure)

I (2 points)

Pour construire D, on construit au compas la quatrième point du parallélogramme ABDC, en utilisant le fait que les longueurs AB et CD doivent être égales, de même que les longueurs AB et CD.



II (3 points)

Dans un repère (O ; I ; J), on considère les points A(1 ; 3), B(5 ; -1) et C(2 ; 5).
ABCD est un parallélogramme si, et seulement si, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix}2-x_D\\5-y_D\end{pmatrix}$.

On doit donc avoir $\begin{cases}2-x_D=4\\5-y_D=-4\end{cases}$ d'où $\begin{cases}x_D=-2\\y_D=9\end{cases}$. D a pour coordonnées $\boxed{D(-2\,;\,9)}$

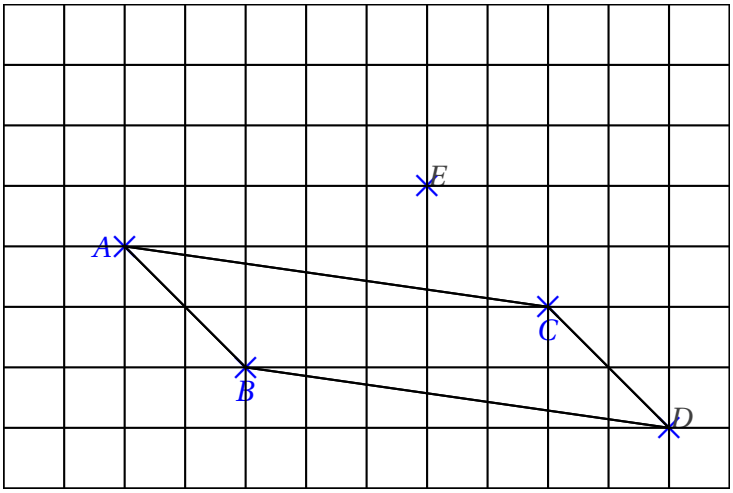
III (4 points)

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), on considère les points A(1 ; 3), B(-2 ; 1) et C(7 ; -6).

1. $\boxed{\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}}$, $\boxed{\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}9\\-7\end{pmatrix}}$ et $\boxed{\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6\\-9\end{pmatrix}}$.
2. On en déduit :
   - $AB = \sqrt{(-3)^2+(-2)^2} = \sqrt{9+4} = \boxed{\sqrt{13}}$
   - $BC = \sqrt{9^2+(-7)^2} = \sqrt{81+49} = \boxed{\sqrt{130}}$
   - $AC = \sqrt{6^2+(-9)^2} = \sqrt{36+81} = \boxed{\sqrt{117}}$
3. $BC^2 = 130$; $AB^2 + AC^2 = 13 + 117 = 130$.
   On en déduit que $\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2}$.
   D'après la **réciproque du théorème de Pythagore**, le triangle ABC est **rectangle en B**.

IV (4 points)

On considère les points A, B et C représentés ci-dessous.



1. D'après le cours, le vecteur somme de deux vecteurs de même origine est le vecteur **diagonale** que l'on peut former sur ces deux vecteurs. (voir figure)
2. Pour E, même méthode : voir figure.
3. Par construction, ABDC et BAEC sont des parallélogrammes.
4. Puisque ABDC est un parallélogramme, $\boxed{\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}}$.

   De même, BACE est un parallélogramme, donc $\boxed{\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CE}}$.

   On en déduit que $\boxed{\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE}} = \overrightarrow{BA}$, donc C est le milieu de [DE].

V (3 points)

A, B, C et D sont quatre points quelconques.
Démontrer que :

a) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE} = \boxed{\overrightarrow{AE}}$ (en appliquant la relation de Chasles).

b) $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} = \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DA}\right) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \boxed{\vec{0}}$

VI (2 points)

Soient les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}\sqrt{3}+1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\\sqrt{3}-1\end{pmatrix}$.
On applique la condition de colinéarité :

$\left(\sqrt{3}+1\right)\left(\sqrt{3}-1\right) - 1\times 2 = \sqrt{3}^2 - 1^2 - 1 = 3 - 1 - 2 \boxed{= 0}$ donc ces deux vecteurs sont **colinéaires**.

VII (2 points)

Soient les points $M(2\,;\,3), N(5\,;\,7)$ et $P(-7\,;\,-9)$.

$\boxed{\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}}$; $\boxed{\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}-9\\-12\end{pmatrix}}$

Il est clair que $\overrightarrow{MP} = -3\overrightarrow{MN}$ donc les lecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$ sont **colinéaires**.
Les points M, N et P sont bien **alignés**.