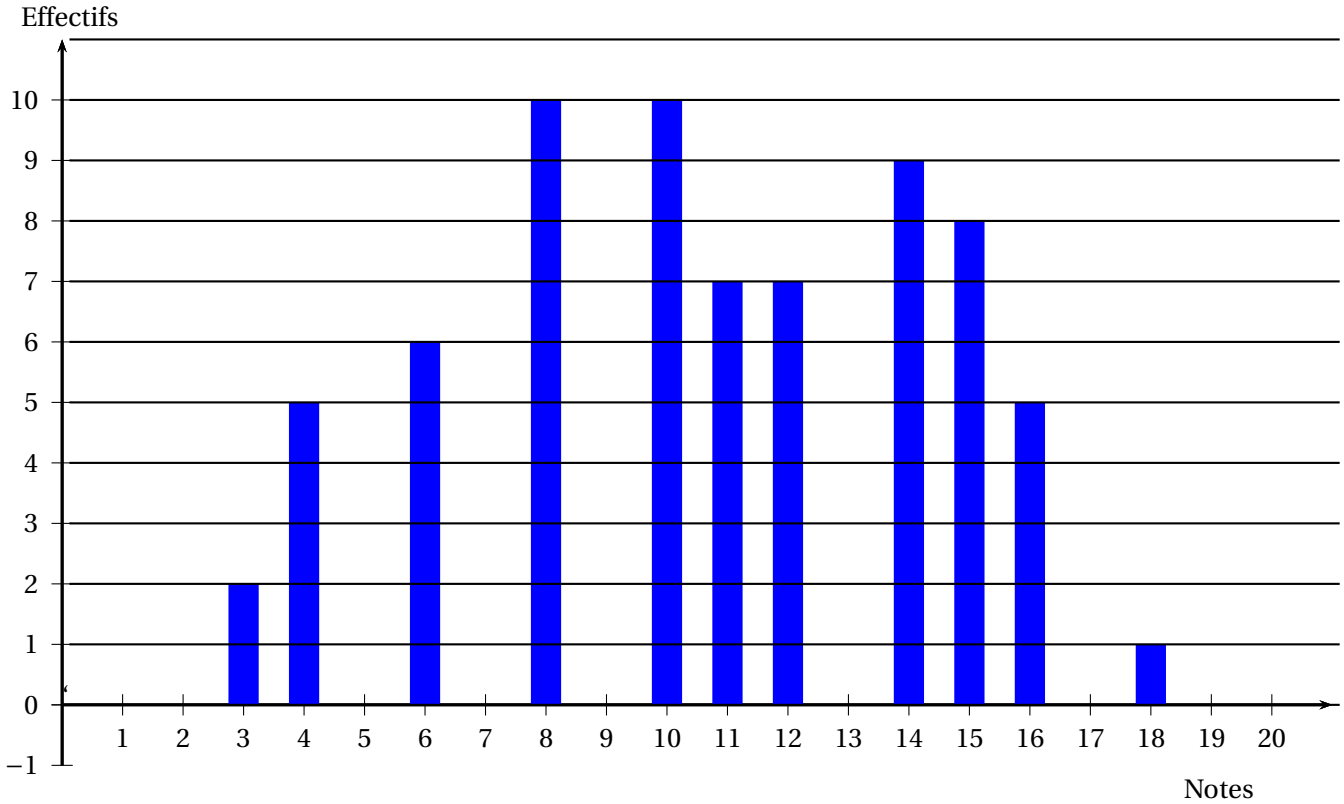
Correction du contrôle commun n° 2

Exercice I

Voici les notes au dernier contrôle commun de deux classes de Seconde d'un lycée.



1. Compléter le tableau suivant :

Notes	3	4	6	8	10	11	12	14	15	16	18
Effectifs	2	5	6	10	10	7	7	9	8	5	1
E.C.C.	2	7	13	23	33	40	47	56	64	69	70

2. La moyenne de cette série statistique est :

$$\overline{x} = \frac{(3\times 2)+\cdots+(18\times 1)}{70} = \frac{747}{70} \approx 10,7.$$ $\boxed{\overline{x} \approx 10,7}$.

3. L'effectif total est $N = 70$, nombre pair.
   $70 = 2 \times 35$.
   La médiane est la moyenne entre les valeurs de rang 35 et 356 : $\text{Me} = \frac{x_{35}+x_{36}}{2} = \frac{11+11}{2} = \boxed{11}$.
   $\frac{N}{4} = 17,5$ donc le premier quartile Q_1 est la valeur de rang 18 : $Q_1 = x_{18} = \boxed{8}$.
   $3 \times \frac{N}{4} = 52,5$ donc le troisième quartile Q_3 est la valeur de rang 53 : $Q_3 = x_{53} = \boxed{14}$.
   Par conséquent : $\boxed{Q_1 = 8}$, $\boxed{\text{Me} = 11}$ et $\boxed{Q_3 = 14}$

Exercice II

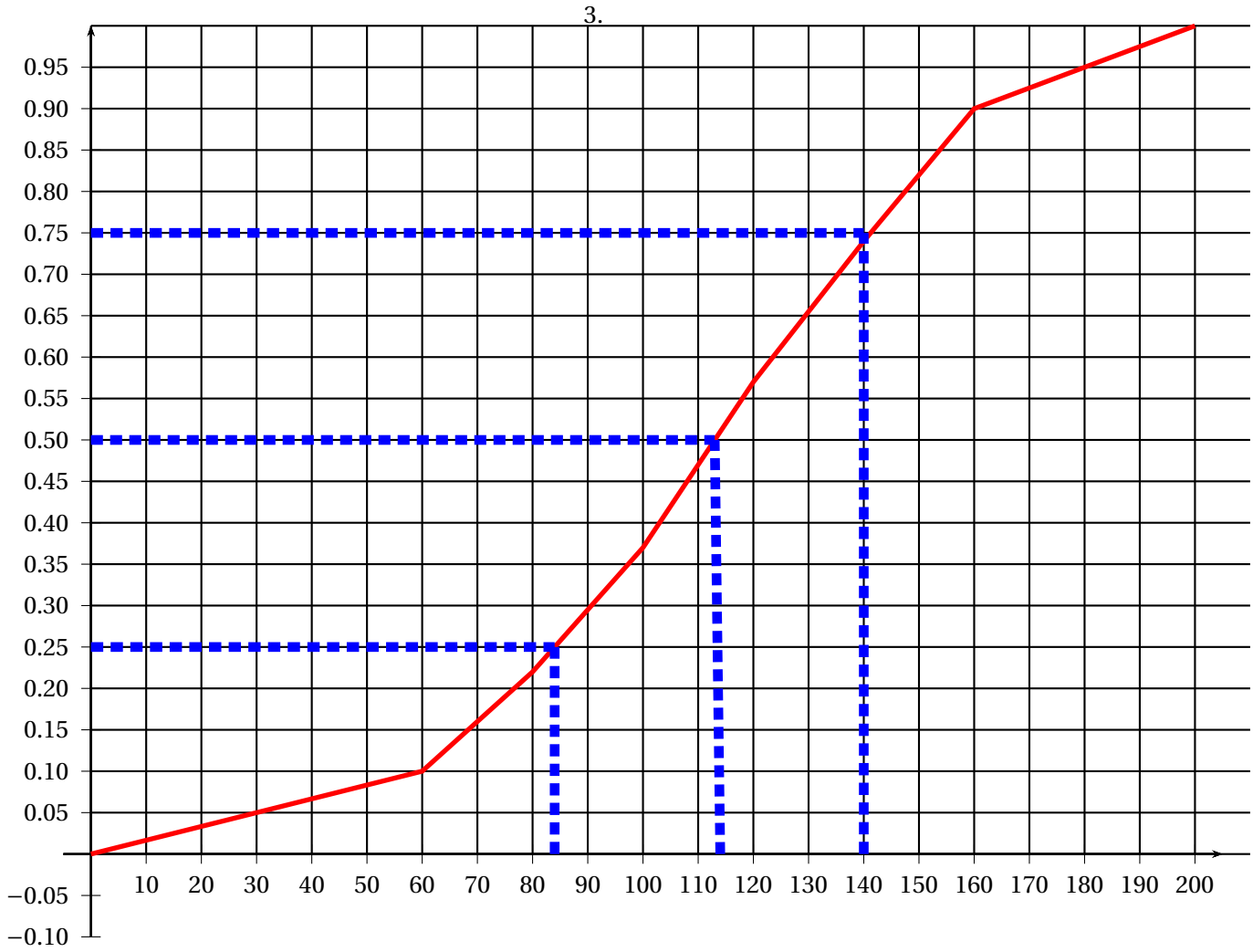
Une agence bancaire a réalisé une enquête de marché sur la possibilité de faire payer les chèques bancaires aux clients émetteurs.
1500 chèques ont été étudiés. Ils sont classés suivant leur montant, exprimé en euros, et les résultats de cette enquête figurent dans le tableau suivant.

classes	[0 ; 60[	[60 ; 80[	[80 ; 100[	[100 ; 120[	[120 ; 140[	[140 ; 160[	[160 ; 200[
effectifs	152	183	224	297	256	238	150
fréquences	0,10	0,12	0,15	0,20	0,17	0,16	0,10
F.C.C.	0,10	0,22	0,37	0,57	0,74	0,90	1,00

L'effectif total est 1 500. La première fréquence est $\dfrac{152}{1500} \approx 0,10$ et de même pour les autres.

1. Voir tableau ci-dessus.
2. La fréquence cherchée est $0,20 + 0,17 + 0,16 \approx 0,53$, donc $\boxed{53\,\%}$.

3.



4. On trouve graphiquement $\boxed{Q_1 \approx 84}$, $\boxed{\text{Me} \approx 113}$ et $\boxed{Q_3 \approx 140}$, correspondant respectivement à des fréquences de 0,25, 0,5 et 0,75.
5. La moitié des chèques ont un montant inférieur à la médiane.
   25 % des chèques ont un montant inférieur ou égal à Q_1 et 75 % des chèques ont un montant inférieur ou égal à Q_3.

Exercice III

Résoudre les équations et les inéquations suivantes :

a) $2x-9=8x+3$ donne $2x-8x=3+9$ donc $-6x=12$ d'où $x=\dfrac{12}{-6}=-2$;

$$\boxed{\mathscr{S}=\{-2\}}.$$

b) $(-15x+3)(3x+9)=0$

Un produit de facteurs est nul sin, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

- $-15x+3=0$ donnc $x=\dfrac{-3}{-15}=\dfrac{1}{5}$
- $3x+9=0$ donne $x=\dfrac{-9}{3}=-3$

L'ensemble des solutions est

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{-3\,;\,\frac{1}{5}\right\}}.$$

Remarque : on aurait pu factoriser davantage puis simplifier :
$(-15x+3)(3x+9)=0$ équivaut à $3(-5x+1)\times 3(x+3)=0$ donc $9(-5x+1)(x+3)=0$ d'où $(-5x+1)(x+3)=0$

c) $(2x+1)(x+4)\geqslant(x+4)(3-5x)$

- On se ramène à une comparaison à 0 ; on transpose tout du même côté ; cela donne :
  $(2x+1)(x+4)-(x+4)(3-5x)\leqslant 0$
- On factorise :
  $(x+4)[(2x+1)-(3-5x)]\leqslant 0$ d(où $(x+4)(2x+1-3+5x)\leqslant 0$ donc $\boxed{(x+4)(7x-2)\leqslant 0}$
- $x+4=0$ pour $x=-4$
- $7x-2=0$ pour $x=\dfrac{2}{7}$.
- On renseigne alors un tableau de signe :

x	$-\infty$	-4		$\frac{2}{7}$	$+\infty$
$x-4$	$-$	0	$=$	$+$	
$7x-4$	$-$		$-$	0	$+$
$(x-4)(7x-2)$	$+$	0	$-$	0	$+$

L'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\mathscr{S}=]-\infty\,;\,-4]\cup\left[\frac{2}{7}\,;\,+\infty\right[}.$$

d) $(1+3x)^2-(2-5x)^2=0$

On reconnaît une **identité remarquable** :
$(1+3x)^2-(2-5x)^2=0$ équivaut à $[(1+3x)+(2-5x)][(1+3x)-(2-5x)]=0$ donc $(-2x+3)(8x-1)=0$.
On applique alors le théorème du produit nul :

$$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\frac{1}{8}\,;\,\frac{3}{2}\right\}}.$$

e) $2x-10<7x+5$ donne $-5x<15$ donc $x>-\dfrac{15}{5}=-3$, c'est-à-dire $x>-3$ (l'inégalité a changé de sens, car nous avons divisé par un nombre négatif).

$$\boxed{\mathscr{S}=]-3\,;\,+\infty[}.$$

f) $(5x-3)(-3x+4)<0$

- $5x-3=0$ équivaut à $x=\dfrac{3}{5}$
- $-3x+4=0$ équivaut à $x=\dfrac{4}{3}$
- On renseigne alors un tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{3}{5}$		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$5x-3$		$-$	0	$+$		$+$	
$-3x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
$(5x-3)(-3x+4)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On veut que le produit soit négatif ; l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\mathscr{S}:\left]-\infty\,;\,\frac{3}{5}\right[\cup\left]\frac{4}{3}\,;\,+\infty\right[}$$

Exercice IV

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=(3x-2)^2-16 \quad \text{(appelée forme 1)}$$

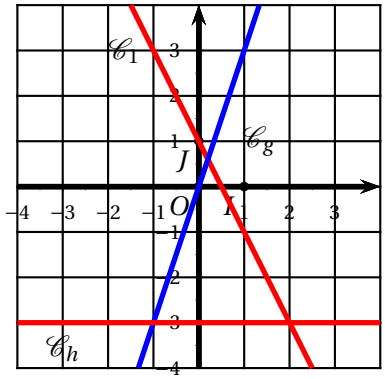
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

1. $f(x)=(3x-2)^2-16=(3x)^2-2\times 3x\times 2+2^2-16=9x^2-12x+4-16=\boxed{9x^2-12x-12}$ (forme 2).
2. $f(x)=(3x-2)^2-16=(3x-2)^2-4^2=[(3x-2)-4][(3x-2)+4]=\boxed{(3x-6)(3x+2)}$ (forme 3)(que l'on peut encore factoriser en $3(x-2)(3x+2)$).
   On a reconnu une différence de deux carrés, donc on a appliqué une identité remarquable.
3. En choisissant la forme la plus adaptée, répondre aux questions suivantes :
   a. $f(x)=0$ s'écrit, en utilisant la **forme 3** :
   $3(x-2)(3x+2)=0$.
   Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.
   On en déduit : $\boxed{\mathscr{S}=\left\{-\dfrac{2}{3}\,;\,2\right\}}$.
   b. Pour calculer l'image de $\dfrac{2}{3}$, on utilise la **forme 1** : $f\left(\dfrac{2}{3}\right)=\left(3\times\dfrac{2}{3}-2\right)^2-16=0^2-16=\boxed{-16}$.
   c. Les antécédents de -12 sont les solutions de l'équation $9x^2-12x-12=-12$, en utilisant la **forme 2** donc $9x^2-12x=0$.
   On factorise : $3x(3x-4)=0$.
   Les solutions sont 0 et $\dfrac{4}{3}$.
   Les antécédents de -23 sont 0 et $\dfrac{4}{3}$.
   d. L'abscisse du point d'intersection avec l'axe des ordonnées est $x=0$; l'ordonnée correspondante est $\boxed{f(0)=-12}$.
   Les coordonnées du point d'intersection de $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des ordonnées sont $\boxed{(0\,;\,-12)}$.

Exercice V

1. Parmi les fonctions suivantes, préciser lesquelles sont affines. Justifier soigneusement.
   a) $f : x \mapsto 5x-2$ est affine car $5x-2 = ax+b$ avec $\begin{cases} a=5 \\ b=-2 \end{cases}$.
   b) $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}+3$ n'est pas affine car $\dfrac{1}{x}+3$ n'est pas de la forme $ax+b$.
   c) $h : x \mapsto 4-6x$ est affine car $4-6x = ax+b$ avec $\begin{cases} a=-6 \\ b=4 \end{cases}$
   d) $i : x \mapsto 3x^2$ n'est pas affine car $3x^2$ n'est pas de la forme ax.
2. Tracer dans le repère ci-dessous les courbes représentatives des fonctions suivantes :
   Les représentation graphiques dont des droites ; pur tracer une droite, il suffi de deux points ou d'un point et du coefficient directeur. .

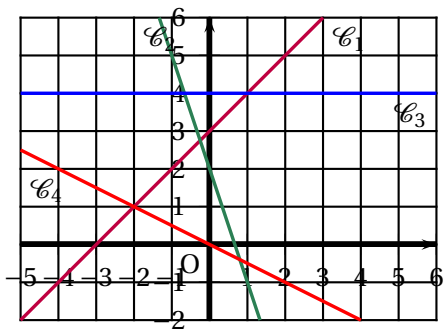
$$f : x \mapsto -2x+1 \quad ; \quad g : x \mapsto 3x \quad ; \quad h : x \mapsto -3$$



3. f est une fonction affine, donc il existe deux réels a et b tels que $\boxed{f(x) = ax+b}$.
   $a = \dfrac{f(3)-f(-2)}{3-(-2)} = \dfrac{6-1}{5} = \dfrac{5}{5} = 1$.
   On en déduit que $f(x) = x+b$.
   Calcul de b : $f(3) = 6$ donc $3+b = 6$ d'où $b = 3$.
   Finalement : $\boxed{f(x) = x+3}$.
4. Puisque g est linéaire, il existe m tel que $g(x) = mx$.
   $g(3) = 20$ donc $3m = 20$ d'où $m = \dfrac{20}{3}$ et par conséquent : $\boxed{g(x) = \dfrac{20}{3}x}$.

Exercice VI

On considère la figure ci-dessous :



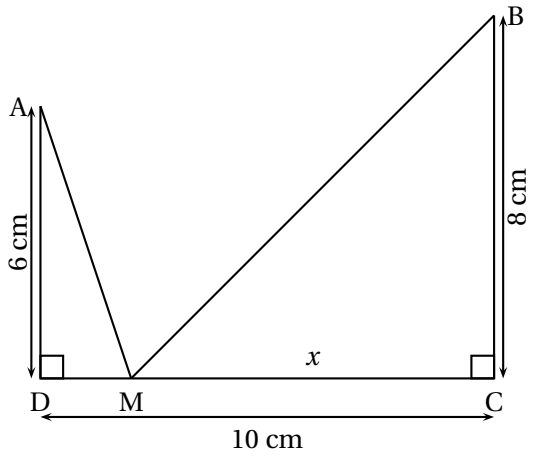
Rappel : le coefficient directeur d'une droite sécante à l'axe (Oy), passant par les points $A\left(x_A\,;\,y_A\right)$ et $B\left(x_B\,;\,y_B\right)$ est $a = \dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$ et peut se lire facilement, dans la plupart des cas, directement sur le graphique.

- Pour f_1 : $\mathscr{C}_1$ passe par le point de coordonnées (0,3) et le coefficient directeur est 1, donc $\boxed{f_1(x) = x+3}$.
- Pour f_2 : $\mathscr{C}_2$ passe par le point de coordonnées (0 ; 2) donc l'ordonnée à l'origine est 2 ; le coefficient directeur est -3, donc $\boxed{f_2(x) = -3x+2}$.
- Pour f_3 : il est clair que la fonction est constante donc $\boxed{f_3(x) = 4}$.
- $\mathscr{C}_4$ passe par l'origine, donc f_4 est linéaire ; le coefficient directeur est $-\frac{1}{2}$ donc $\boxed{f_4(x) = -\frac{1}{2}x}$.

Exercice VII

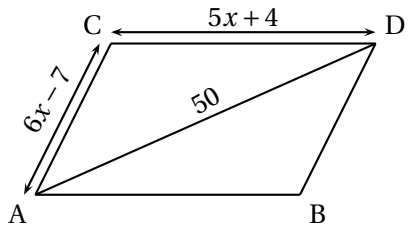
M est un point variable du segment $[CD]$ et les triangles ADM et BCM sont des triangles rectangles.
Le but de l'exercice est de chercher la distance CM afin que $MA = MB$.
On appelle x la longueur CM.

1. x appartient à $[0\,;\,10]$.
2. MAD est rectangle. D'après le **théorème de Pythagore**, on a :
   $MA^2 = MD^2 + DA^2 = (10-x)^2 + 6^2 = (10-x)^2 + 36$.
   De même : $MB^2 = MC^2 + CB^2 = x^2 + 8^2 = x^2 + 64$.
3. $MA = MB$ équivaut à $MA^2 = MB^2$ car ce sont des nombres positifs.
   Le problème revient donc à avoir :
   $(10-x)^2 + 36 = x^2 + 64$ donc $100 - 20x + x^2 + 36x^2 + 64$ donc $\boxed{x^2 + 64 = x^2 - 20x + 136}$
4. On en déduit : $20x = 136 - 64$ donc $20x = 72$ d'où $x = \frac{72}{20} = \boxed{\frac{18}{5}}$ (ou $x = 3,6$).
5. Les longueur MA et MB sont égales pour $x = \frac{18}{5}$.



Exercice bonus :

On considère la figure suivante :



Ce parallélogramme est rectangle si, et seulement si, le triangle AVD est rectangle.

D'après la **réciproque du théorème de Pythagore**, c'est le cas si $(6x-7)^2+(5x+4)^2=50^2$, donc $36x^2-84x+49+25x^2+40x+16=2\,500$

d'où : $61x^2-44x+2435=0$.

Or : $61x^2-44x-2435=61\left(x^2-\frac{44}{61}x+\frac{2435}{61}\right)=61\left[(x-\frac{22}{61})^2-\left(\frac{22}{61}\right)^2-\frac{2435}{61}\right]=61\left[\left(x+\frac{22}{61}\right)^2-\frac{149019}{61^2}\right]$.

L'équation s'écrit, après simplification par 61 :

$\left(x-\frac{22}{61}\right)^2-\frac{149019}{61^2}=0$ d'où $\left[x-\frac{22}{51}-\frac{\sqrt{149019}}{61}\right]\left[x-\frac{22}{51}+\frac{\sqrt{149019}}{61}\right]=0.$

On a deux solutions : $x_1=\frac{22+\sqrt{149019}}{61}$ et $x_2=\frac{22-\sqrt{149019}}{61}$.

x est une longueur, donc un nombre positif, donc on ne garde que x_1 comme solution :

$$\boxed{x=\frac{22+\sqrt{149019}}{61}\approx 6,69}$$