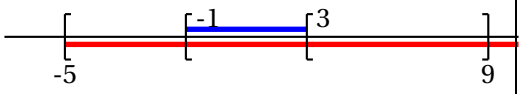
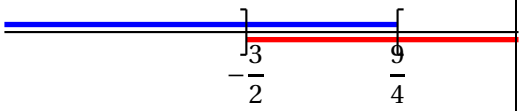
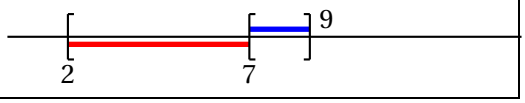
Correction du devoir commun de mathématiques n° 1 de 2nde

I

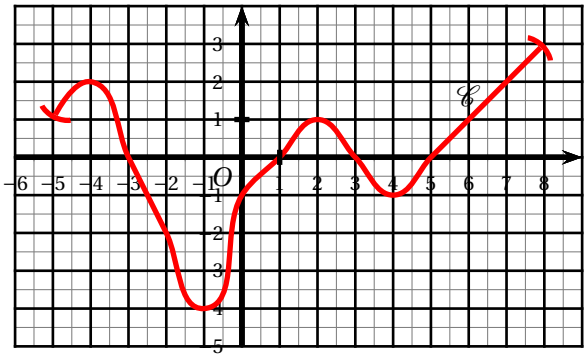
1.

Inégalités	phrase	appartenance à un ensemble
$x < 8$	x est un nombre strictement inférieur à 8	$x \in]-\infty\,;\,8[$
$-5 \leqslant x < 2$	x est un nombre supérieur ou égal à -5 et strictement supérieur à 2	$x \in [-5\,;\,2[$
$-5 \leqslant x < 2$	x est un nombre supérieur ou égal à -5 et strictement supérieur à 2	$x \in [-5\,;\,2[$

I	J	$I \cup J$
$[-5\,;\,9]$	$[-1\,;\,3[$	$I \cup J = [-5\,;\,9]$ 
$\left]-\infty\,;\,\frac{9}{4}\right[$	$\left]-\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$	$I \cup J = \mathbb{R}$ 
$[2\,;\,7[$	$[7\,;\,9[$	$I \cup J = [2\,;\,9]$ 

II

Ci-dessous est représentée la courbe $\mathscr{C}$, représentative d'une fonction f.



1. L'ensemble de définition $\mathscr{D}$ de f est $\boxed{\mathscr{D} =]-5\,;\,8]}$.
2. • $\boxed{f(2) = 1}$

- $\boxed{f(5)=0}$
- $\boxed{f(-2)=-2}$

3. • 1,5 a pour antécédent **-4,7 ; -3,5 et 6,5**.
   - -2 a pour antécédents**-2 et -0,3**.
   - 3,5 n'a pas d'antécédent par f.
4. $f(x)=2$: $\boxed{\mathscr{S}=\{-4\,;\,7\}}$
5. Résoudre graphiquement les inéquations suivantes :
   (a) $f(x)\leqslant 2$: $\boxed{\mathscr{S}=[-5\,;\,7]}$.
   (b) $f(x)>1$: $\boxed{\mathscr{S}=]-5\,;\,-3,5[\cup]6\,;\,8]}$
6. Tableau de variations : 1,5 pt

x	-5		-4		-1		2		4		8
$f(x)$	1	↗	2	↘	-4	↗	1	↘	-1	↗	3

7. Le maximum de f est $\boxed{3}$, **atteint** en $\boxed{x=8}$.
   Le minimum de f est $\boxed{-4}$, atteint en $\boxed{x=-1}$.

III

Voici le tableau de variation d'une fonction f :

x	-12		0		4		16
$f(x)$	4	↘	-3	↗	11	↘	6

1. L'image de 4 est 11 ; $\boxed{f(4)=11}$.
2. Le minimum de f est -3 donc -5 n'a **pas d'antécédent**.
3. Le nombre 2 a deux antécédents par f : un dans l'intervalle [-12 ; 0] et l'autre dans l'intervalle [0 ; 4]
4. Comparer lorsque c'est possible en justifiant :
   (a) $-5\in[-12\,;\,0]$ et f est **décroissante** sur cet intervalle, donc $\boxed{f(-5)\leqslant 4}$.
   $5\in[4\,;\,16]$ et f est **décroissante** sur cet intervalle, donc $\boxed{f(5)\geqslant 6}$.
   On en déduit que $\boxed{f(-5)<f(5)}$.
   (b) 1 et 2 appartiennent à l'intervalle [0 ; 4]n $1<2$ et f est **croissante** sur cet intervalle, donc $\boxed{f(1)\leqslant f(2)}$

IV

Soient les fonctions $f : x\longmapsto 4x^2+3x-5$, $g : x\longmapsto -7x+4$ et $h : x\longmapsto \frac{1}{2}x^2$.

1. • $f(3)=4\times 3^2+3\times 3-5=4\times 9+9-5=40$. $\boxed{f(3)=40}$
   - $f(-1)=4\times(-1)^2+3\times(-1)-5=4-3-5=-4$: $\boxed{f(-1)=-4}$
   - $f\left(\sqrt{2}\right)=4\times\sqrt{2}^2+3\sqrt{2}-5=4\times 2+3\sqrt{2}-5=3+3\sqrt{2}$: $\boxed{f\left(\sqrt{2}\right)=3+3\sqrt{2}=3\left(1+\sqrt{2}\right)}$.
   - $f\left(\frac{1}{3}\right)=4\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+3\times\frac{1}{3}-5=4\times\frac{1}{9}+1-5=\frac{4}{9}-4=\frac{4-36}{9}=-\frac{32}{9}$: $\boxed{f\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{32}{9}}$.

2. Un antécédent de 0 est un nombre x tel que $g(x) = 0$.

   $g(x) = 0$ s'écrit $-7x + 4 = 0$ d'où $7x = -4$ et donc $x = \frac{4}{7}$.

   L'antécédent de 0 par g est $\frac{4}{7}$.

   De même, $g(x) = -5$ s'écrit $-7x + 4 = -5$ qui donne $x = \frac{9}{7}$.

   L'antécédent de -5 par g est $\frac{9}{7}$.

3. • $h(x) = -1$ donne $\frac{1}{2}x^2 = -1$; or $\frac{1}{2}x^2$ est toujours positif, donc l'équation n'a aucune solution : -1 n'a **pas d'antécédent** par h.

   • $h(x) = 2$ s'écrit $\frac{1}{2}x^2 = 2$, soit $x^2 = 4$ qui a pour solutions -2 et 2. 2 a donc deux antécédents, $\boxed{\text{-2 et 2}}$.

V

Dans un repère orthonormé (O ; I ; J), on considère les points M(1 ; -2), N(2 ; 1), P(5 ; 0), Q(4 ; -3) et R(1 ; 4).

1. • $MN = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = \sqrt{(2-1)^2 + (1-(-2))^2} = \sqrt{1^1 + 3^2} = \boxed{\sqrt{10}}$.

   • $NP = \sqrt{(x_P - x_N)^2 + (y_P - y_N)^2} = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{9+1} = \boxed{\sqrt{10}}$

   • $MP = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2} = \sqrt{4^2 + +2^2} = \boxed{\sqrt{20}}$

2. $MP^2 = 20$ et $MN^2 + NP^2 = 10 = 10 = 20$ donc $\boxed{MP^2 = MN^2 + NP^2}$.

   Daprès la **réciproque du théorème de Pythagore**, le triangle MNP est **rectangle** en N.

3. Le milieu de la diagonale $[MP]$ du quadrilatère $MNPQ$ a pour coordonnées

   $\left(\frac{x_M + x_P}{2} ; \frac{y_M + y_P}{2}\right) = \boxed{(3 ; -1)}$.

   Le milieu de la diagonale $[NQ]$ du quadrilatère $MNPQ$ a pour coordonnées

   $\left(\frac{x_N + x_Q}{2} ; \frac{y_N + y_Q}{2}\right) = \boxed{(3 ; -1)}$.

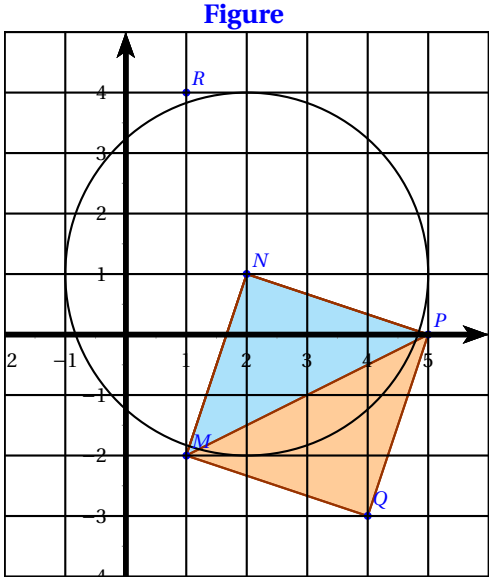
   Les deux diagonales de $MNPQ$ ont le même milieu, donc c'est un **parallélogramme**.

   $MN = NP$, donc ce parallélogramme a deux côtés consécutifs de même longueur : c'est donc un **losange**.

   Puisque le triangle MNP est rectangle, il a un angle droit , donc $MNPQ$ est un **carré**.

4. $NR = \sqrt{(x_R - x_N)^2 + (y_R - y_N)^2} = \sqrt{(1-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10} \neq 3$ donc R n'appartient pas au cercle de centre N et de rayon 3.

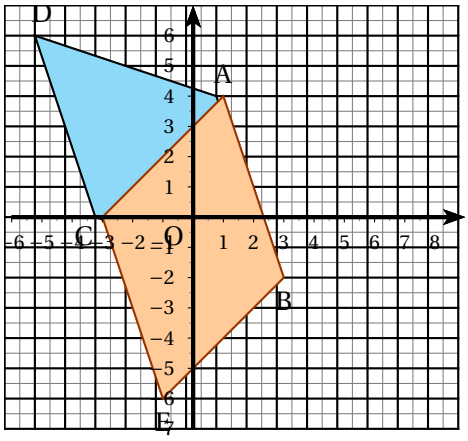
Figure



VI

Dans un repère orthonormé, on considère les points A(1 ; 4), B(3 ; -2), C(-3 ; 0) et D(-5 ; 6).

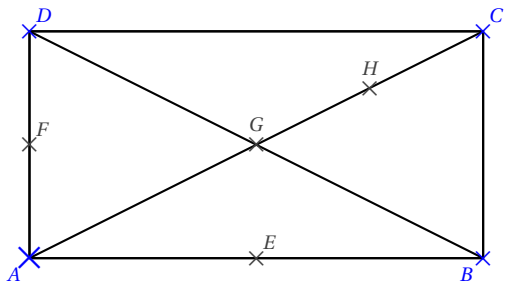
1. **Figure** :



2. Soit M le milieu de [AC] ; on a $x_M = \dfrac{x_A + x_C}{2} = -1$ et $y_M = \dfrac{y_A + y_C}{2} = 2$: $\boxed{M(-1\,;\,2)}$.
3. Soit M' le milieu de [BD].
   On a $x_{M'} = \dfrac{x_B + x_D}{2} = -1$ et $y_{M'} = \dfrac{y_B + y_D}{2} = 2$: $\boxed{M'(-1\,;\,2)}$.
   M et M' ont les même coordonnées donc $M = M'$: les diagonales du quadrilatère ABCD se coupent en leur milieu, donc c'est un parallélogramme.
4. ABEC est un parallélogramme si, et seulement si, les diagonales ont le même milieu. On doit avoir :
   $\dfrac{x_A + x_E}{2} = \dfrac{x_B + x_C}{2}$ donc $\dfrac{1 + x_E}{2} = \dfrac{3 + (-3)}{2}$, d'où $\dfrac{1 + x_E}{2} = 0$; on en déduit $x_E = -1$.
   $\dfrac{y_A + y_E}{2} = \dfrac{y_B + y_C}{2}$ donc $\dfrac{4 + y_E}{2} = \dfrac{-2 + 0}{2} = -1$, d'où $4 + y_E = -2$; on en déduit $y_E = -6$.
   On en déduit $\boxed{E(-1\,;\,6)}$

VII

Soit ABCD un rectangle avec AB = 2 AD.
Soient E et F les milieux respectifs de [AB] et [AD], G le centre du rectangle et H le milieu de [GC].



1. Un repère $(O\,;\,I\,;\,J)$ est orthonormé si les droites (OI) et (OJ) sont perpendiculaires et si les longueurs OI et OJ sont égales.
2. Le repère $(A\,;\,B\,;\,F)$ est orthogonal, car les droites (AB) et (AF) sont **perpendiculaires**, mais $\boxed{AB \neq AF}$.
   Le repère $(A\,;\,E\,;\,D)$ est quant à lui orthonormé car les droites (AE) et (AD) sont **perpendiculaires** et $AE = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2} \times 2AD = AD$, donc $\boxed{AE = AD}$
3. • Dans le repère $(A\,;\,B\,;\,F)$, on a :
   $A(0\,;\,0)$, $B(1\,;\,0)$, $C(1\,;\,2)$, $D(0\,;\,2)$, $E\left(\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)$, $F(0\,;\,1)$, $G\left(\dfrac{1}{2}\,;\,1\right)$ et $H\left(\dfrac{3}{4}\,;\,\dfrac{3}{2}\right)$.
   • Dans le repère $(A\,;\,E\,;\,D)$, on a :
   $A(0\,;\,0)$, $B(2\,;\,0)$, $C(2\,;\,1)$, $D(0\,;\,1)$, $E(1\,;\,0)$, $F\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$, $G\left(1\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$ et $H\left(\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{3}{4}\right)$.