# 2nde : correction du contrôle sur fonctions du second degré et homographiques, probabilités (1 heure)

## I (4 points)

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 2x - 1$ et $\mathscr{P}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

1. $f(-1) = 3$ ; $f(-0,5) = 0,5$ et $f(0) = -1$.
   Certes, on a $f(-1) < f(-0,5) < f(0)$, mais cela ne veut pas dire que la fonction $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ ; on ne sait pas ce qui se passe entre ces valeurs, ni ce qui se passe par exemple pour $x > 0$.
2. $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$, $b = -2$ et $c = -1$.
   La forme canonique est $f(x) = (x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = \dfrac{1}{2}$ et $\beta = f(\alpha) = -\dfrac{3}{2}$.
   On en déduit que $\boxed{f(x) = 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{3}{2}}$
3. (a) On sait que les coordonnées de l'extremum (minimum, puisque le coefficient de $x^2$ est positif) sont $(\alpha\,;\,\beta)$ donc $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,-\dfrac{3}{2}\right)$.
   Comme $a > 0$, on sait que c'est le minimum de $f(x)$.
   (b) Le tableau de variation de $f$ est :

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | ↘ | $-\frac{3}{2}$ | ↗ | |

4. $f(x) = 0$ s'écrit $2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{3}{2} = 0$
   donc $2\left[\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{3}{4}\right] = 0$ d'où $\left[\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{3}{4}\right] = 0$ en simplifiant par 2.
   Alors : $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 0$.
   En factorisant (troisième identité remarquable), on obtient :
   $\left[\left(x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]\left[\left(x - \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right] = 0$ d'où
   $\left(x - \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 0$.
   On en déduit que l'équation a deux solutions :
   $$\boxed{\mathscr{S} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}\,;\,\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$$

## II (3 points)

Soit $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{x+d}$ une fonction homographique, dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

| $x$ | $-\infty$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | ↘ | ‖ | ↘ | |

On sait de plus que sa courbe représentative, $\mathscr{C}_f$, coupe l'axe des ordonnées au point A d'ordonnée $-\dfrac{5}{2}$ et passe par le point B de coordonnées $(1\,;\,-7)$.

1. 2 est la valeur interdite, donc $2 + d = 0$, c'est-à-dire $\boxed{d = -2}$.
   On en déduit que $f(x) = \dfrac{ax+b}{x-2}$.
2. $f(0) = -\dfrac{5}{2}$ donc $\dfrac{b}{-2} = -\dfrac{5}{2}$ donc $\boxed{b = 5}$.
   $\boxed{f(x) = \dfrac{ax+5}{x-2}}$.
   $f(1) = -7$ donne $\dfrac{a+5}{-1} = -7$ donc $a + 5 = 7$ d'où $\boxed{a = 2}$.
   Finalement $\boxed{f(x) = \dfrac{2x+5}{x-2}}$

## III (1 point)

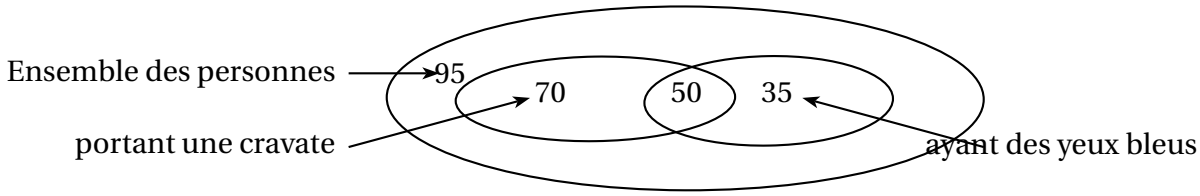
Lors d'une expérience aléatoire, deux événements $A$ et $B$ sont tels que :
$p(A) = 0,3$, $p(B) = 0,4$ et $p(A \cup B) = 0,6$.
On a $p(A \cap B) = p[A] + p(B) - p(A \cup B) = 03 + 0,4 - 0,6 = 0,1$ donc
$$\boxed{p(A \cap B) = 0,1}.$$

## IV (4 points)

Dans une assemblée de 250 personnes, on ne remarque que les hommes portant la cravate ou ayant les yeux bleus.

Il y a 120 hommes qui portent la cravate, 85 hommes qui ont les yeux bleus, dont 50 portent la cravate.

Faisons un diagramme :




On peut aussi faire un tableau :

| | Cravate (événement C) | Pas de Cravate événement $\left(\overline{C}\right)$ | Total |
|---|---|---|---|
| Yeux Bleus (événement B) | 50 | 35 | 85 |
| Yeux non bleus (événement $\overline{B}$) | 70 | 95 | 165 |
| Total | 120 | 130 | 250 |

On discute avec une personne choisie au hasard dans cette assemblée.

- Notons $C$ « l'événement la personne porte une cravate ».
- Notons $V$ « l'événement la personne a des yeux bleus ».

1. La probabilité que ce soit un homme portant la cravate est $p(C) = \dfrac{120}{250} = \boxed{\dfrac{12}{25}}$.
2. La probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus et portant la cravate est $p(C \cap B) = \dfrac{50}{250} = \boxed{\dfrac{1}{5}}$.
3. La probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus ou portant la cravate est : $p(C \cup B) = \dfrac{155}{250} = \dfrac{31}{50}$
   [par lecture du schéma ou du tableau ou en utilisant la même formule quels le III]
4. La probabilité de discuter avec une personne qui n'est ni un homme aux yeux bleus, ni un homme portant la cravate est $p\left(\overline{C \cup B}\right) = 1 - p(C \cup B) = 1 - \dfrac{31}{50} = \boxed{\dfrac{19}{50}}$

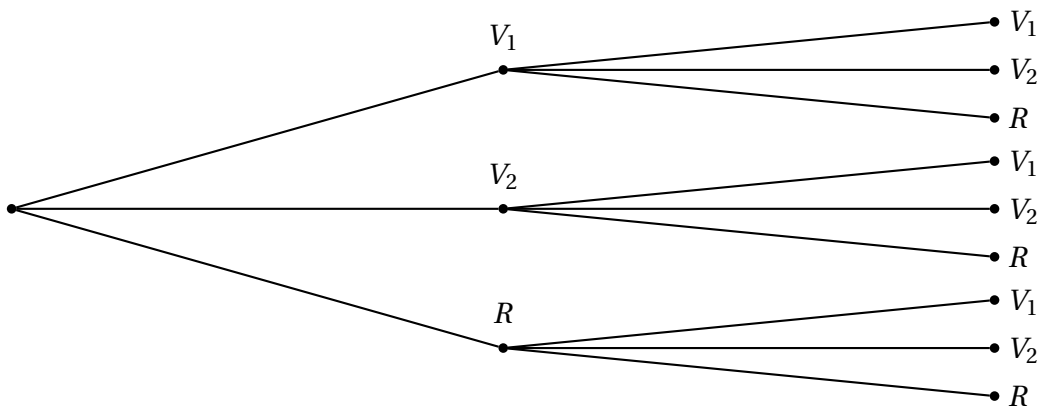
## V (4 points)

**Première situation** :

Une urne contient 2 billes vertes et 1 bille rouge (V1, V2 et R)

On choisit une bille au hasard, on la remet dans l'urne, puis on choisit de nouveau une bille dans l'urne.

Le mieux est de faire un arbre ;



l'univers est constitué de 9 couples possibles.

a) La probabilité d'obtenir « 2 billes vertes » est $\boxed{\frac{4}{9}}$.

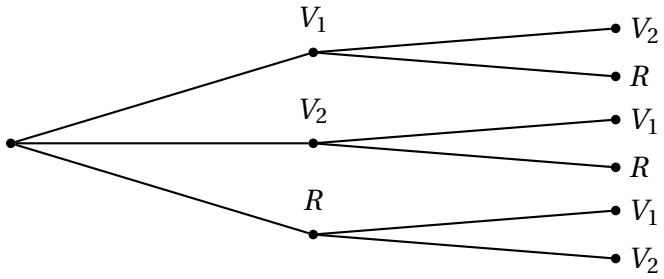
b) La probabilité d'obtenir « 2 billes rouges » est $\boxed{\frac{2}{9}}$

**Deuxième situation** :

Une urne contient 2 billes vertes et 1 bille rouge (V1, V2 et R1).

On choisit une bille au hasard, on ne la remet pas dans l'urne, puis on choisit de nouveau une bille dans l'urne.

On représente la situation par un arbre :




Cette fois, $\Omega$ est constitué de six couples.

a) La probabilité d'obtenir « 2 billes vertes » est $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$

b) La probabilité d'obtenir « 2 billes rouges » est $\boxed{0}$ puisque ce n'st pas possible (après qu'on a tiré une boule rouge, il n'y en a plus, puisqu'on ne remet pas la boule dans l'urne)..

## VI (4 points)

Voici les résultats d'un sondage effectué en 1999 auprès de 2 000 personnes, à propos d'Internet :

— 40% des personnes interrogées déclarent être intéressées par Internet,

— 35% des personnes interrogées ont moins de 30 ans et, parmi celles-ci, quatre cinquièmes déclarent être intéressées par Internet,

— 30% des personnes interrogées ont plus de 60 ans et, parmi celles-ci, 85% ne sont pas intéressées par Internet.

1. On complète le tableau :

| | intéressées par Internet | non intéressées par internet | **total** |
|---|---|---|---|
| moins de 30 ans | 560 | 140 | 700 |
| de 30 à 60 ans | 150 | 550 | 700 |
| plus de 60 ans | 90 | 510 | 600 |
| **total** | 800 | 1200 | **2 000** |

2. On choisit au hasard une personne parmi les 2 000 interrogées. On suppose que toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies. On considère les événements :

A : « *la personne interrogée a moins de 30 ans* »,

B : « *la personne interrogée est intéressée par Internet* ».

(a) $\boxed{p(A) = \frac{700}{2000} = \frac{7}{20}}$ ; $\boxed{p(B) = \frac{800}{2000} = \frac{2}{5}}$

(b) $\overline{A}$ est l'événement : « la personne interrogée a plus de 30 ans ».

$p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A) = 1 - \dfrac{7}{20} = \boxed{\dfrac{13}{20}}$.

(c) L'événement $A \cap B$ est « La personne a moins de 30 ans et est intéressée par Internet ».

$p(A \cap B) = \dfrac{560}{2000} = \boxed{\dfrac{7}{25}}$.

3. La probabilité qu'elle ait plus de 30 ans sachant que la personne interrogée est intéressée par Internet est $\dfrac{150+90}{800} = \dfrac{240}{800} = \boxed{\dfrac{3}{10}}$