2nde : correction de la feuille d'exercices sur les équations et fonctions affines

I

Résoudre l'équation $(2x+1)(x-3)(x+7)=0$

Solution :
Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

- 1^{er} cas : $2x+1=0$ donc $2x=-1$ d'où $x=-\dfrac{1}{2}$.
- 2^{e} cas : $x-2=0$ donne $x=3$
- 3^{e} cas : $x+7=0$ donne $x=-7$

L'ensemble e des solutions est $\boxed{\mathscr{S}=\left\{-7\,;\,-\dfrac{1}{2}\,;\,3\right\}}$

II

Trouver une équation dont l'ensemble des solutions est $\{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\}$

Solution : Il suffit de s'appuyer sur le théorème du produit nul.
Une équation possible est :

$$\boxed{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)=0}.$$

III

Parmi les expressions suièantes, quelle sont celles de fonctions affines ? linéaires ? On précisera leurs coefficients directeurs.

Solution : On rappelle que f est une fonction affine si, et seulement si, il existe deux réels a et b tels que $f(x)=ax+b$.

- $f(x)=\sqrt{3}x-\dfrac{1}{5}=ax+b$ en posant $\left\{\begin{array}{l} a=\sqrt{3} \\ b=-\dfrac{1}{5}\end{array}\right.$

  Le coefficient directeur est $\sqrt{3}$ et l'ordonnée à l'origine est $-\dfrac{1}{5}$.
- $g(x)=\sqrt{2x+3}$ ne peut pas se mettre sous la forme $ax+b$, donc g n'est pas une fonction affine.
- $h(x)=\pi x=ax+b$ avec $\left\{\begin{array}{l} a=\pi \\ b=0\end{array}\right.$ donc h est affine et même linéaire.

  Le coefficient directeur est π et l'ordonnée à l'origine est 0.
- $k(x)=\dfrac{1-2x}{x-4}$.

  k a une valeur interdite qui est 4 ; or, une fonction affine est définie sur $\mathbb{R}$ et n'a par conséquent aucune valeur interdite. k n'est donc pas affine.
- $\ell(x)=2(x-\sqrt{5})-2x=2x-2\sqrt{5}-2x=-2\sqrt{5}=ax+b$ avec $\left\{\begin{array}{l} a=0 \\ bv=-2\sqrt{5}\end{array}\right.$

  ℓ est donc affine (et même constante).

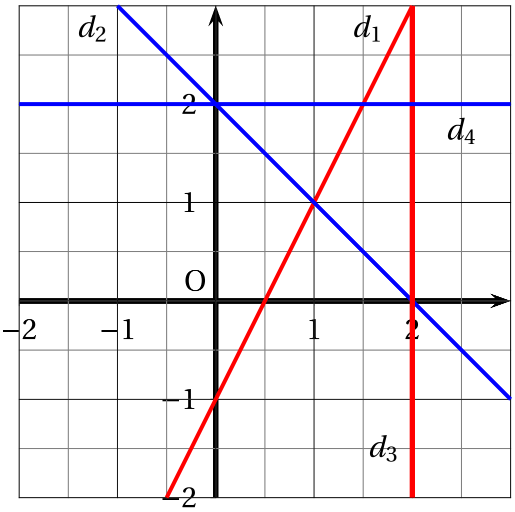
IV

Donner le sens de variation des fonctions définies ci-dessous :
Rappel : les variations d'une fonction affine sont données par le signe du coefficient directeur.

- $f(x)=4-2x$; le coefficient directeur est $a=-2<0$ donc f est une fonction affine décroissante.
- $g(x)=x$; le coefficient directeur est $a=1>0$ donc g est une fonction affine croissante.
- $h(x)=\dfrac{-1+5x}{3}=-\dfrac{1}{3}+\dfrac{5}{3}x$; le coefficient directeur est $a=\dfrac{5}{3}>0$ donc h est une fonction affine croissante.
- $k(x)=(\pi-4)x+6$; le coefficient directeur est $a=\pi-4<0$ donc k est une fonction affine décroissante.
- $\ell(x)=\dfrac{2x+3}{4}-\dfrac{x}{2}=\dfrac{2x+3-2x}{4}=\dfrac{3}{4}$; le coefficient directeur est $a=0$ donc ℓ est une fonction affine constante.

V

Voici quatre droites tracées dans un repère orthonormal.
Associer à chacune de ces droites, lorsque cela est possible, la fonction affine qu'elle représente parmi la liste des fonctions ci-dessous.



- d_1 passe par les points de cordonnées $(0\ ;\ -1)$ et $(1\ ;\ 1)$; l'ordonnée à l'origine est donc $b=-1$ et le coefficient directeur vaut $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2}{1}=2$.
  d_1 est donc la représentation graphique de la fonction $f_5 : x \longmapsto 2x-1$
- d_2 passe par les points de cordonnées $(0\ ;\ 2)$ et $(2\ ;\ 0)$; l'ordonnée à l'origine est donc $b=2$ et le coefficient directeur vaut $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-2}{2}=-1$.
  d_2 est donc la représentation graphique de la fonction $f_3 : x \longmapsto -x+2$
- d_3 est parallèle à l' axe des ordonnées et n'est donc pas la représentation graphique d'une fonction (sinon, un nombre aurait plusieurs images, ce qui est impossible our une fonction !)
- d_4 est parallèle à l'axe des abscisses et correspond dont à une fonction affine constante
  d_4 est donc la représentation graphique de la fonction $f_2 : x \longmapsto 2$

VI

1. Déterminer la fonction linéaire f telle que $f(3)=4$.

   Solution : f est linéaire donc $f(x)=ax$.

   $f(3)=4$ donc $3a=4$ d'où $a=\frac{4}{3}$.

   Pa r conséquent : $\boxed{f(x)=\frac{4}{3}x}$.
2. Déterminer la fonction affine g telle que $g(1)=3$ et $g(-2)=-3$.

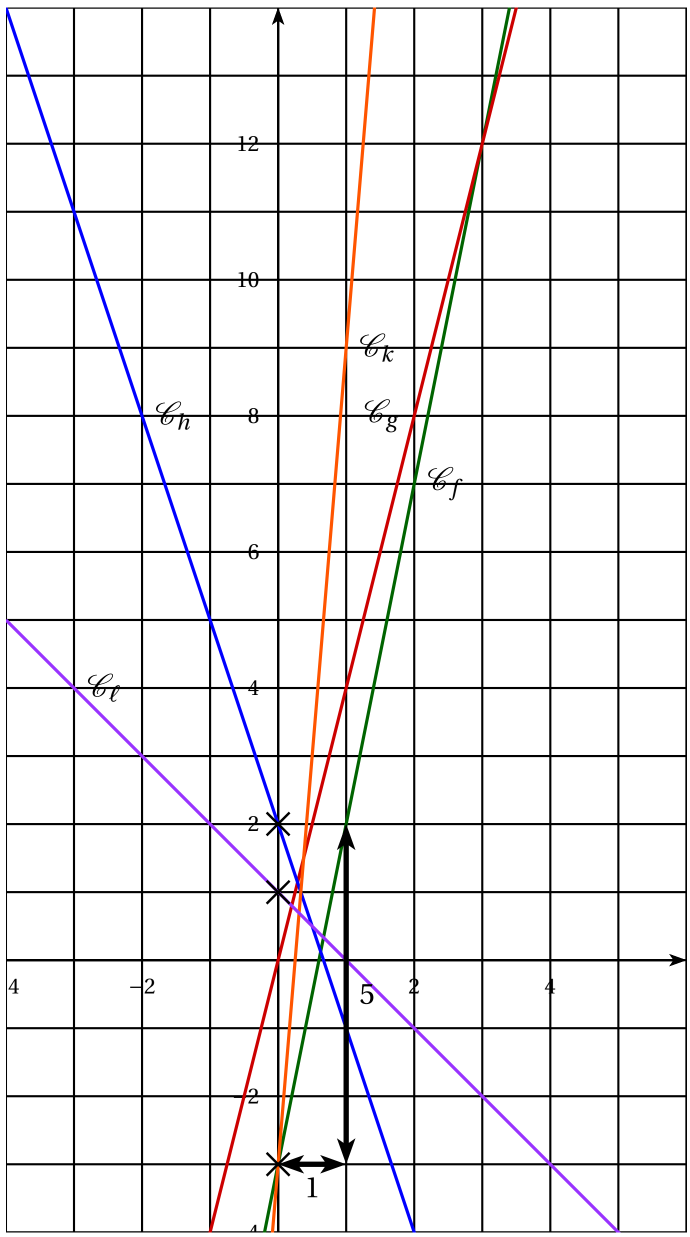
   Solution : Le coefficient directeur est $a=\frac{g(-2)-g(1)}{-2-1}=\frac{-3-3}{-3}=\frac{-6}{-3}=2$.
   On en déduit que $g(x)=2x+b$.
   Calcul de b : $g(1)=3$ donne $2\times 1+b=3$ donc $b=3-2=1$.
   Conclusion : $\boxed{g(x)=2x+1}$.
3. Déterminer la fonction affine h telle que $h(2)=-5$ et $h(7)=3$.
   Le coefficient directeur est $a=\frac{h(7)-h(2)}{7-2}=\frac{3}{-}(-5)7-2=\frac{8}{5}$.
   On a alors $h(x)=\frac{8}{5}x+b$.
   Or $h(2)=-5$ donc $2\times\frac{8}{5}+b=-5$ soit $\frac{16}{5}+b=-5$ donc $b=-5-\frac{16}{5}=\frac{-25-16}{5}=-\frac{41}{5}$.
   Conclusion : $\boxed{h(x)=\frac{8}{5}x-\frac{41}{5}}$

VII

Représenter graphiquement les fonctions définies ci-dessous, puis donner leur sens de variation :

- $f(x)=5x-3$; le coefficient directeur est $5>0$ donc f est croissante.
- $g(x)=4x$; le coefficient directeur est $4>0$ donc g est croissante.
- $h(x)=2-3x$; le coefficient directeur est $-3<0$ donc h est décroissante.
- $k(x)=12x-3$; le coefficient directeur est $12>0$ donc k est croissante.
- $\ell(x)=-x+1$; le coefficient directeur est $-1<0$ donc ℓ est décroissante.

Pour tracer les droites correspondantes, on place les points d'abscisse 0 et d'oronge à l'origine les données à l'origine ainsi que les coefficients directeurs.



Remarque : on peut aussi calculer les coordonnées de deux points pour chacune des droites.

VIII

Soit f une fonction affine telle que $f(2)=5$ et $f(5)=7$. Calculer $f(10)$ et $f(-3)$.

On peut utiliser la proportionnalité des accroissements (coefficients directeurs).

$\dfrac{f(5)-f(2)}{5-2}=\dfrac{f[10]-f(2)}{10-2}$

d'où : $\dfrac{7-5}{5-2}=\dfrac{f(10)-5}{10-2}$

d'où : $\dfrac{2}{3}=\dfrac{f(10)-5}{8}$ qui donne $f(10)-5=\dfrac{2}{3}\times 8=\dfrac{16}{3}$.

Alors : $f(10)=\dfrac{16}{3}+5=\dfrac{16+15}{3}=\dfrac{31}{3}$.

De même :

$\dfrac{f(5)-f(2)}{5-2}=\dfrac{f[-3]-f(2)}{-3-2}$

d'où : $\dfrac{7-5}{5-2}=\dfrac{f(-3)-5}{-3-2}$

d'où : $\dfrac{2}{3}=\dfrac{f(-3)-5}{-5}$ qui donne

$f(-3)-5=\dfrac{2}{3}\times(-5)=-\dfrac{10}{3}$.

Alors : $f(-3)=-\dfrac{10}{3}+5=\dfrac{-10+15}{3}=\dfrac{5}{3}$.

Autre méthode.

On commence par déterminer l'expression de la fonction affine f puis on calcule les images demandées.

Le coefficient directeur est $a=\dfrac{f(5)-f(2)}{5-2}=\dfrac{2}{3}$.

On en déduit que $f(x)=\dfrac{2}{3}x+b$.

Calcul de b :

$f(2)=5$ donc $\dfrac{2}{3}\times 2+b=5$ soit $\dfrac{4}{3}+b=5$ d'où

$b=5-\dfrac{4}{3}=\dfrac{15-4}{3}=\dfrac{11}{3}$.

Par conséquent : $\boxed{f(x)=\dfrac{2}{3}x+\dfrac{11}{3}}$.

On retrouve $\boxed{f(10)=\dfrac{31}{3}}$ et $\boxed{f(-3)=\dfrac{5}{3}}$