AP 2nde : problèmes de mises en équations

I

Un riche marchand londonien mourut en laissant quatre fils. Ceux-ci se partagèrent ses biens de la manière suivante :

— le premier fils prit la moitié de la fortune moins 3 000 livres
— le deuxième fils prit le tiers de la fortune moins 1 000 livres
— le troisième fils prit exactement le quart de la fortune ;
— le quatrième fils le cinquième de la fortune plus 600 livres.

Quelle était la fortune laissée par le père ?

II

Quels sont les trois entiers impairs consécutifs dont la somme vaut 411 ?

III

Si on augmentait de 3 m le côté d'un carré, alors son aire augmenterait de 45 m^2 .
Quelle est l'aire de ce carré ?

IV

a) Développer l'expression $0,003(x-40)(x+100)$.

b) Lorsque deux véhicules roulent à la même vitesse V (en km.h^{-1}), la distance de sécurité les séparant (en m) est donnée par la formule :

$$D = 8 + 0,18V + 0,003V^2.$$

Déterminer la distance de sécurité séparant deux véhicules roulant à 100 km.h^{-1}

c) Calculer la vitesse maximale de deux véhicules voulant une distance de sécurité de 20 m.

V

Lorsqu'on soustrait un même nombre au numérateur et au dénominateur de la fraction $\frac{25}{9}$, on obtient une fraction égale au nombre soustrait.
Quel est ce nombre ?

VI

Deux entiers impairs consécutifs ont pour produit 399.
On cherche quelles sont les valeurs possibles de ces entiers .

1. Écrire l'équation de ce problème en choisissant comme inconnue le plus petit des deux entiers.
   Expliquer pourquoi on ne peut pas trouver la réponse.
2. Écrire l'équation de ce problème en choisissant comme inconnue le plus grand des deux entiers.
   Expliquer pourquoi on ne peut pas trouver la réponse.
3. Écrire l'équation de ce problème en choisissant comme inconnue l'entier pair entre les deux entiers impairs.
   Résoudre cette équation.

VII

Trois entiers consécutifs sont tels que la somme de leurs carrés vaut 4 109.
Quelles sont les valeurs possibles de ces entiers ?

Correction

I

On pose x la somme l'aisée par le père.
On obtient $x = \left(\frac{x}{2} - 3\,000\right) + \left(\frac{x}{3} - 1\,000\right) + \frac{x}{4} + \left(\frac{x}{5} + 600\right)$.
La solution est $\boxed{x = 12\,000}$.

II

On pose n le plus petit des trois entiers impairs.
$n + (n+2) + (n+4) = 411 \Leftrightarrow \boxed{n = 135}$

III

On appelle c le côté du carré.
On doit avoir $(c+3)^2 = c^2 + 45$.
On en déduit $c = 6$ donc l'aire du carré est 36.

IV

1. $0,003(x-40)(x+100) = 0,003\left(x^2 + 100x - 40x - 4000\right) = 0,003\left(x^2 + 60x - 4\,000\right) = 0,003x^2 + 0,18x - 1$
2. Pour $V = 100$, on trouve $D = 56$ m.
3. Pour $D = 20$, on obtient l'équation $0,003V^2 + 0,18V - 1 = 0$ d'après la première question.
   Les solutions sont -10 0et 40, donc $V = 40$ (car $V > 0$)

V

Soit x le nombre cherché.
On doit avoir $\frac{25 - x}{9 - x} = x$.
On résout l'équation et on trouve $x = 5$

VI

1. Je pose n le plus petit des deux entiers impairs.
   Le deuxième entier impair est $n + 2$.
   Alors : $n(n+2) = 399 \Leftrightarrow n^2 + 2n - 399 = 0$.
   C'est une équation du 2nd degré, qu'on ne sait pas résoudre (pour le moment).
2. Je pose n le plus grand des deux entiers impairs.
   Le premier entier impair est $n - 2$.
   Alors :$(n-2)n = 399 \Leftrightarrow n^2 - 2n - 399 = 0$.
   On ne sait pas résoudre cette équation (pour le moment).
3. On choisit n comme étant le nombre pair entre les deux nombres impairs.
   Alors : $(n-1)(n+1) = 399$ d'où $n^2 = 400$, donc $n = -20$ ou $n = 20$.
   Les entiers sont 19 et 21, ou -21 et -19.

VII

Je pose n le deuxième des trois entiers.
Le premier est $n - 1$; le troisième est $n + 1$, alors : $(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = 4\,109 \Leftrightarrow n^2 - 2n + 1 + n^2 + n^2 + 2n + 1 = 4\,109 \Leftrightarrow 3n^2 + 2 = 4\,109 \Leftrightarrow 3n^2 = \Leftrightarrow n^2 = \frac{4\,107}{3} \Leftrightarrow n^2 = 1369$.
On en déduit $n = \pm 37$.