Fonctions affines

Table des matières

I Définition :

Définition

Une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est affine s'il existe deux réels a et b tel que, pour tout x, $f(x) = ax + b$.

Proproété

Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine.
La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.
a est le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine, c'est-à-dire que la droite passe par le point de coordonnées $(0\ ;\ b)$.

II Variations

Théorème

Soit f une fonction affine définie par : $f(x) = ax + b$.

- f est croissante si, et seulement si, $a > 0$.
- f est constante si, et seulement si, $a = 0$.
- f est décroissante si, et seulement si, $a < 0$.

Démonstration :
Soient deux nombres quelconques x_1 et x_2, avec $x_1 < x_2$.
$f(x_2) - f(x_1) = (ax_1 + b) - (ax_2 + b) = ax_1 + -ax_2 - b = a(x_2 - x_1)$.
Comme $x_2 - x_1$ est positif, puisque, par hypothèse, $x_1 < x_2$, , $f(x_2) - f(x_1)$ est du signe de a, donc positif si $a > 0$ (f est alors croissante), constant si $a = 0$ et négatif si $a < 0$.
Si $a > 0$, $x_1 < x_2$ entraîne que $f(x_1) < f(x_2)$, donc f respecte l'ordre et f est croissante.
Si $a = 0$, f est constante, car, pour tout x, $f(x)0x + b = b$.

Si $a>0$, $x_1<x_2$ entraîne que $f(x_1)>f(x_2)$, donc f rencerse l'ordre et f est décroissante.

Remarque :
Soit $f: x \mapsto ax+b$ une fonction affine, avec $a \neq 0$.
$f(x)=0 \Leftrightarrow ax+b=0 \Leftrightarrow ax=-b \Leftrightarrow x=-\dfrac{b}{a}$.
On en déduit les tableaux de variations possibles de f, selon le signe de a.
On en déduit les tableaux de variation (selon le signe de a)

$\boxed{\text{Pour } a>0}$:

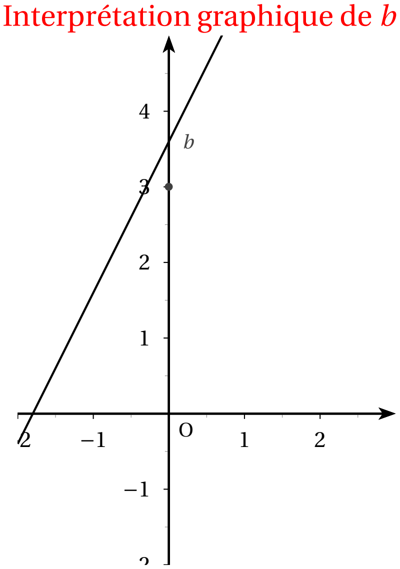
x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

$\boxed{\text{Pour } a<0}$:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	

Remarque : la représentation graphique d'une fonction affine $fr: x \mapsto ac+b$ est une droite.
b est l'ordonnée à l'origine. On a $b=f(0)$
a est le coefficient directeur.

Interprétation graphique de b :



III Caractérisation d'une fonction affine

Théorème

f est une fonction affine si, et seulement si, l'accroissement Δy de l'image est proportionnel à l'accroissement Δx de la variable.
Autrement dit, x_1 et x_2 étant deux réels distincts, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=a$ où a est un nombre constant.

Démonstration :
Si f est une fonction affine, $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=a$.

Réciproque :

Soit f une fonction telle que, pour tous x_1 et x_2, $\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=a$.

Alors, en particulier, pour x et 0, on a : $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=a$ d'où, en posant $f(0)=b$, $f(x)=ax+b$.

Application : on connaît les images de deux nombres par une fonction affine erg l'on veut l'image d'un troisième nombre, sans trouver l'expression de la fonction affine :

x	2	4	7
$f(x)$	-1	5	

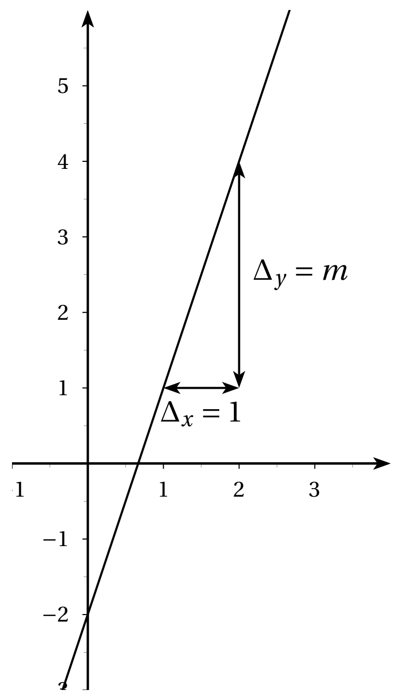
Puisque f est affine, on a : $\dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}=\dfrac{f(7)-f(2)}{7-2}$ donc $\dfrac{5-(-1)}{4-2}=\dfrac{f(7)-(-1)}{7-2}$, soit $\dfrac{6}{2}=\dfrac{f(7)+1}{5}$.

Par conséquent : $3=\dfrac{f(7)+1}{5}$ donc $f(7)+1=3\times 5=15$ d'où $f(7)=15-1=14$: $\boxed{f(7)=14}$.

Interprétation graphique de m : $m=\dfrac{\Delta_y}{\Delta_x}$ donc $\Delta_y=m\Delta_x$.

Si l'on prend $\Delta_x=1$, on a $\Delta_y=m$.

Autrement dit : si l'on se déplace de 1 unité parallèlement à l'axe des abscisses, on se déplace en même temps de m parallèlement à l'axe des ordonnées.



Remarque : si l'on se déplace de k unités parallèlement à l'axe des abscisses, on se délace dans le même temps de km unités parallèlement à l'axe des ordonnées.

On peut facilement visualiser l'influence des deux paramètres, coefficient directeur et ordonnée à l'origine, à l'aide d'un ordinateur.

On peut par exemple voir les deux fichiers suivants qui montrent ce qui se passe quand on fait varier l'ordonnée à l'origine pour le prier, le coefficient directeur pour le second. (Il faut avoir Java sur son ordinateur).

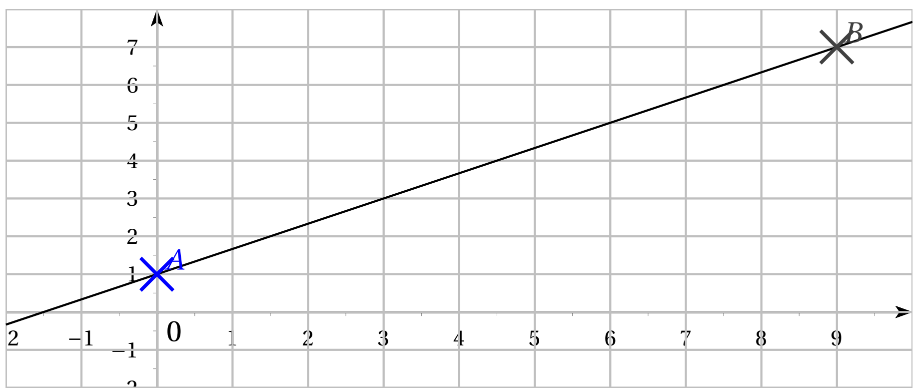
- cliquer sur variations de l'ordonnée à l'origine
- variations du coefficient directeur

IV Comment tracer graphiquement la représentation graphique d'une fonction affine ?

IV.1 À partir de deux points :

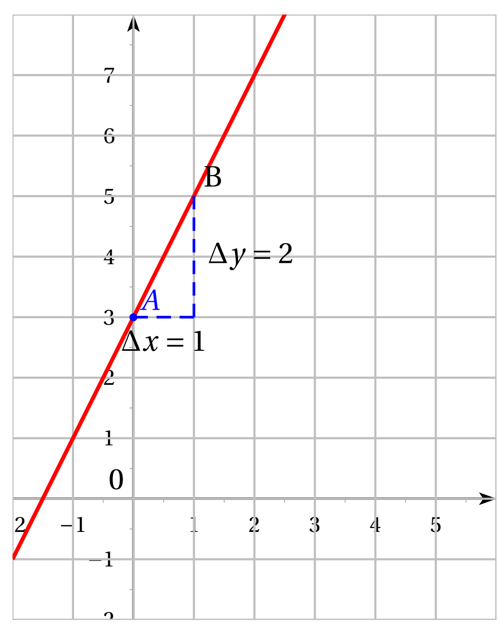
Exemple : on veut représenter graphiquement la fonction affine $f : x \mapsto \frac{2}{3}x + 1$.
On sait que la représentation graphique de f est une droite. Pour tracer une droite, il suffit de connaître deux points de celle-ci.
On calcule alors les coordonnées de deux points de cette droite, en esssayant d'avoir des coordonnées entières, pour qu'elles soient faciles à placer.
L'ordonnée à l'origine vaut 1, donc la droite passe par le point de coordonnées $(0\ ;\ 1)$.
On remarque qu'il suffit de prendre x multiple de 3 (x pas trop proche de 0, pour accroître la précision du tracé.)
On remplit un tableau :

x	0	9
$y = \frac{2}{3}x + 1$	1	$\frac{2}{3} \times 9 + 1 = 7$



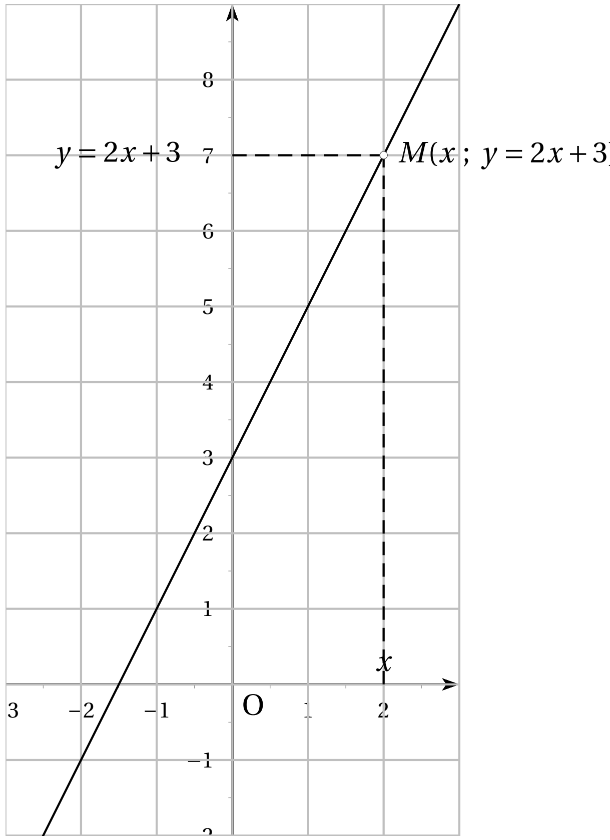
IV.2 En utilisant le coefficient directeur

Exemple : représenter graphiquement la fonction affine $x \mapsto 2x + 3$.
L'ordonnée à l'origine est 3, donc la droite passe par le point A de coordonnées $(0\ ;\ 3)$.
Le coefficient directeur est 2, donc $2 = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, c'est-à-dire $\Delta y = 2\Delta x$.
On choisit par exemple $\Delta x = 1$; on obtient alors $\Delta y = 2 \times 1 = 2$.
En partant de A, on se déplace de 1 en abscisses, et alors de 2 en ordonnées.



Remarque :
La représentation graphique d'une fonction affine $f \mapsto ax+b$ est une droite (sécante à l'axe de l'axe des ordonnées (Oy)) ; on dit que cette droite a pour **équation réduite** $\boxed{y = ax+b}$.

Exemple : La droite d'équation $y = 2x+3$ est la représentation graphique de la fonction $f \mapsto 2x+3$.



Exemple :
Trouver l'équation de la droite passant par les points A(2 ; 5) et B(7 ; −1).
C'est la même chose que de chercher la fonction affine f vérifiant $f(2) = 5$ et $f(7) = -1$.
Notons m le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine.
$m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-1-5}{7-2} = -\dfrac{6}{5}$.
L'équation de la droite est alors $y = -\dfrac{6}{5}x + p$.
A appartient à la droite (AB) donc ses coordonnées vérifient cette équation :
$y_A = -\dfrac{6}{5}x_A + p$ donc $5 = -\dfrac{6}{5} \times 2 + p$.
D'où $-\dfrac{12}{5} + p = 5$ et $p = 5 + \dfrac{12}{5} = \dfrac{25+12}{5} = \dfrac{37}{5}$.
L'équation de la droite (AB) est $\boxed{y = -\dfrac{6}{5}x + \dfrac{37}{5}}$.