FONCTIONS POLYNÔMES DE DEGRÉ DEUX-FONCTIONS HOMOGRAPHIQUES

Table des matières

I Fonction polynôme du second degré 1
- I.1 Définitions 1
- I.2 Variations et représentation graphique 2

II Fonctions homographiques 4
- II.1 Définition 4

I Fonction polynôme du second degré

I.1 Définitions

Définition

On appelle fonction **polynôme du second degré** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

o˘ a, b et c sont des réels appelés coefficients avec $a \neq 0$.

Exemples : Exemples de fonctions polynômes du second degré

fonctions polynôme de degré 2	coefficients
$f(x) = 2x^2 - 5x + 3$	$a = 2$, $b = -5$, $c = 3$
$f(x) = -x^2 + 3$	$a = -1$, $b = 0$, $c = 3$
$f(x) = -7x^2 + 3x$	$a = -7$, $b = 3$, $c = 0$

Définition

L'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.
Cette forme est appelée **forme canonique**

Démonstration :
$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x\right) + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2\right] + c = a\left(x - \left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a} + c = \boxed{a(x-\alpha)+\beta}$ en posant $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$; on a alors $\beta == -\dfrac{b^2}{4a} + c = f(\alpha)$, car en remplaçant x par α dans $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, on trouve β.

Exemples :

1. Soit $P(x) = 2x^2 - 4x + 5 = ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$, $b = -4$ et $c = 5$.
   On a $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2 \times 2} = 1$
   $\beta = P(\alpha) = P(1) = 3$
   Par conséquent $P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = 2(x-1)^2 + 3$.
2. $P(x) = -5x^2 + 2x - 7 = ax^2 + bx + c$ avec $a = -5$, $b = 2$ et $c = -7$.
   $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2 \times (-5)} = \dfrac{1}{5}$
   $\beta = P(\alpha) = P\left(\dfrac{1}{5}\right) = -5 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 + 2 \times \dfrac{1}{5} - 7 = -\dfrac{34}{5}$.
   On en déduit $P(x) = -5\left(x - \dfrac{1}{5}\right)^2 - \dfrac{34}{5}$

Remarque : β peut facilement se calculer avec la calculatrice graphique.

- On entre la fonction en allant sur la touche $f(x)$ puis la touche $\boxed{x, t, \theta, n}$
- Pour calculer $f(\alpha)$ (donc $y_1(\alpha)$) puisque la fcontion s'appelle y_1 sur la calculatrice, on tape successivement $\boxed{\text{vars}}$, $y-$vars, fonction, y_1, Entrée. Apparaît alors sur l'écran y_1 ; on complète avec (α), puis Entrée.
  La calculatrice affiche une valeur décimale ; si l'on veut la mettre sous forme fractionnaire (et avoir ainsi une valeur exacte), on tape sur Mode, puis Frac, puis Entrée.

I.2 Variations et représentation graphique

Propriété

La fonction polynôme de degré 2 définir sur $\mathbb{R}$ est :

- strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,\alpha]$ puis strictement croissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$ **si** $a > 0$,
- strictement croissante sur $]-\infty\,;\,\alpha]$puis strictement décroissante $[\alpha\,;\,+\infty[$ **si** $a < 0$,

Démonstration dans le cas $a > 0$: Sur $[\alpha\,;\,+\infty[$:

On prend deux nombres x_1 et x_2 avec $\alpha \leqslant x_1 \leqslant x_2$.

$\alpha \leqslant x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow 0 \leqslant x_1 - \alpha \leqslant x_2 - \alpha \Rightarrow 0 \leqslant (x_1 - \alpha)^2 \leqslant (x_2 - \alpha)^2$ (car la fonction carré est croisante sur $[0\,;\,+\infty[$)

On en déduit $0 \leqslant 0 \leqslant a(x_1 - \alpha)^2 \leqslant a(x_2 - \alpha)^2$ puis $\beta \leqslant a(x_1 - \alpha)^2 + \beta \leqslant a(x_2 - \alpha)^2\,\beta$.

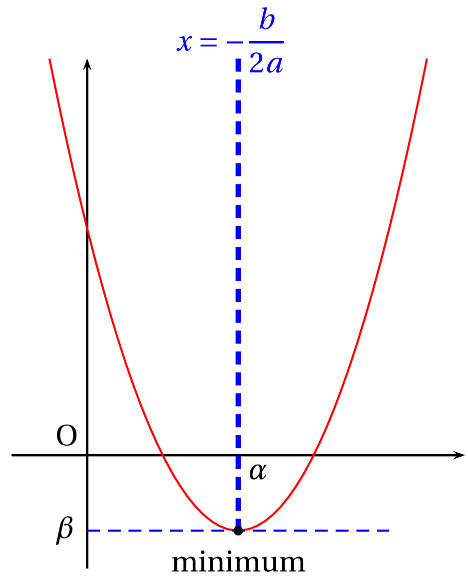
Les images sont classées sdan sel même ordre que les antécédents, donc la fonction f est croissante sur $[\alpha + \infty[$.

Démonstration analogue sur $]-\infty\,;\,\alpha]$ et dans le cas où $a < 0$

Tableau de variations et représentation graphique :

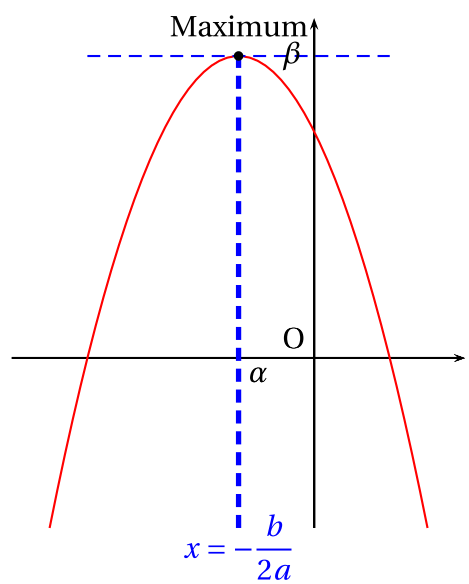
$\boxed{a > 0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	β	$\nearrow$	$+\infty$



$\boxed{a < 0}$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$-\infty$



Dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$, la courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2 est une **parabole**
Cette parabole admet un **axe de symétrie** parallèle à l'axe des ordonnées.

Remarque : pour calculer $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, on effectue plusieurs transformations successives :
$x \mapsto (x-\alpha)^2 \mapsto a(x-\alpha)^2 \mapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$.
La première transformation correspond à une translation parallèlement à l'axe des abscisses de α unités ; la deuxième, multiplication par a, correspond à une dilatation (et un renversement si $a < 0$) et la troisième à une translation parallèlement à l'axe des ordonnées de β unités.

Visualisation à l'aide Geogebra : fichier disponible ici

II Fonctions homographiques

II.1 Définition

Définition

On appelle fonction homographique toute fonction de la forme $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ où a, b, c et d sont des réels avec $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.

Propriété

L'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ est $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

Exemple : soit $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{7x+3}$.

f est bien homographique et l'ensemble de définition est $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{7}\right\}$.

Définition

La courbe représentative d'une fonction homographique est une hyperbole, constituée de deux branches.

Pour la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+3}{7x+3}$, la courbe représentative est :