Table des matières

ÉQUATIONS - INÉQUATIONS

I Équations

I.1 Définition d'une équation

Définition

Une équation est une égalité dans laquelle figurent un ou plusieurs nombres inconnus.
Résoudre cette équation consiste à trouver **toutes** les valeurs que peuvent prendre ce ou ces nombres inconnus pour que l'égalité soit vraie.

Exemples :

- 2x+3=0 a pour solution le nombre $-\dfrac{3}{2}$
- L'équation $x^2 + 1 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2 = -1$ est impossible dans $\mathbb{R}$.

I.2 Méthode générale de résolution

Elle est basée sur le théorème suivant :

Théorème

Dans $\mathbb{R}$, un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

Méthode :

- Sauf cas particulier, on transpose tout du même cÙté pour se ramener à une équation du type $A(x) = 0$.
- On essaye de factoriser pour utiliser le théorème du produit nul.
Pour cela, on essaye de repérer un facteur commun, sinon, une identité remarquable. S'il n'y a pas de factorisation possible, on développe.

Exemples :

(a) Résoudre l'équation $(3x+1)(x+4) = 3x+1$.
Cette équation est équivalente à $(3x+1)(x+4)-(3x+1) = 0$, soit $(3x+1)[(x+4)-1] = 0$ donc $(3x+1)(x+3) = 0$.
$3x+1 = 0$ donne $x = -\dfrac{1}{3}$, $x+3 = 0$ donne $x = -3$.
L'équation a deux solutions : $\mathscr{S} = \left\{-3\ ;\ -\dfrac{1}{3}\right\}$

(b) Résoudre l'équation : $(2x+5)^2 = (3x-2)^2$.
On obtient : $(2x+5)^2 - (3x-2)^2 = 0$, soit : $[(2x+5)+(3x-2)]\,[(2x+5)-(3x-2)] = 0$ qui s'écrit : $(5x+3)(-x+7) = 0$.
Les solutions sont alors : $\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{3}{5}\ ;\ 7\right\}$.

I.3 Équations du type $x^2 = a$

- Si $a < 0$, l'équation n'a pas de solution, car, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geqslant 0$, donc x^2 ne peut pas être égal à un nombre strictement négatif.
- $x^2 = 0$ a pour solution $x = 0$
- Soit $a > 0$; l'équation s'écrit $x^2 - a = 0$, c'est-à-dire $x^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2 = 0$ qui se factorise en $\left(x+\sqrt{a}\right)\left(x-\sqrt{a}\right) = 0$.
L'équation a donc deux solutions : $\mathscr{S} = \{-\sqrt{a}\ ;\ \sqrt{a}\}$.

Exemples :

- L'équation $x^2 = -5$ n'a pas de solution car $-5 < 0$: $\boxed{\mathscr{S} = \emptyset}$.
- L'équation $x^2 = 7$ a deux solutions, car $7 > 0$: $-\sqrt{7}$ et $\sqrt{7}$. $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\sqrt{7}\ ;\ \sqrt{7}\right\}}$

I.4 Équation sous forme d'un quotient

Propriété

L'équation $\dfrac{A(x)}{B(x)} = 0$ équivaut à $B(x) \neq 0$ et $A(x) = 0$

On commence par chercher les valeurs « interdites » qui annulent le dénominateur. L'ensemble de définition (valeurs réelles pour lesquelles l'expression globale est définie) est alors $\mathbb{R}$, privé de ces valeurs interdites.

Exemples :

(a) Résoudre l'équation $\dfrac{2x+3}{x-1} = 0$.
Condition d'existence : $x-1 \neq 0$ donc $x \neq 1$.
On dit que 1 est une valeur interdite. L'ensemble de définition est $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Pour $x \neq 1$, l'équation s'écrit : $2x+3 = 0$ qui donne $x = -\dfrac{3}{2}$.
$-\dfrac{3}{2} \neq 1$ donc $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}}$.

(b) Résoudre $\dfrac{x^2-1}{x+1} = 0$.
Ensemble de définition :On commence par résoudre l'équation $x+1 = 0$ qui a pour solution $x = -1$. C'est

une valeur **interdite**.
L'ensemble de définition est donc $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

On suppose maintenant $x \neq -1$.
L'équation s'écrit alors : $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1) = 0$ qui a pour solutions -1 et 1.
Or, -1 n'appartient pas à l'ensemble de définition..
L'ensemble des solutions de l'équation est donc : $\boxed{\mathscr{S} = \{1\}}$.

Exercices page192 :

II Inéquations

II.1 Signe de l'expression $ax+b$

On considère l'expression $ax+b$ avec $a \neq 0$.

- $ax+b=0 \iff x=-\dfrac{b}{a}$.
- $ax+b>0 \iff ax>-b$.

Si $a>0$, $ax>-b \iff x>-\dfrac{b}{a}$

Si $a<0$, $ax>-b \iff x<-\dfrac{b}{a}$

(car l'inégalité change de sens quand on divise les deux membres par un nombre négatif)

- $ax+b<0 \iff ax<-b$.

Si $a>0$, $ax<-b \iff x<-\dfrac{b}{a}$

Si $a<0$, $ax<-b \iff x<-\dfrac{b}{a}$

(car l'inégalité change de sens quand on divise les deux membres par un nombre négatif)

On récapitule cela dans un tableau de signes :

Nous avons deux cas possibles :

$\boxed{a>0}$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax+b$	$-$	0	$+$

$\boxed{a<0}$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax+b$	$+$	0	$-$

En résumé, on obtient :

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
Signe de $ax+b$	Signe de $-a$	0	Signe de a

Exemples :

a) Trouver en fonction de x le signe de $3x+4$. $3x+4$ s'annule pour $x=-\dfrac{4}{3}$.
Le coefficient 3 est positif, donc on a :

x	$-\infty$	$-\dfrac{4}{3}$	$+\infty$
Signe de $3x+4$	$-$	0	$+$

b) Trouver en fonction de x le signe de $-2x+5$. $-2x+5$ s'annule pour $x=\dfrac{5}{2}$
Le coefficient -2 est négatif, donc on a :

x	$-\infty$	$\dfrac{5}{2}$	$+\infty$
Signe de $-2x+5$	$+$	0	$-$

II.2 Signe d'un produit

Méthode :
On étudie le signe de chaque facteur du produit, on renseigne un tableau de signes et on conclut dans le tableau en appliquant la règle du signe d'un produit.

Exemple :
Déterminer le signe de l'expression $A(x) = (2x+3)(5x-4)$.

- $2x+3=0 \iff x=-\dfrac{3}{2}$
- $5x-4=0 \iff x=\dfrac{4}{5}$
- On renseigne un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
Signe de $2x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $5x-4$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $(2x+3)(5x-4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Conclusion :

- $(2x+3)(5x-4)<0$ pour $x \in \left]-\dfrac{3}{2}\,;\,\dfrac{4}{5}\right]$
- $(2x+3)(5x-4)=0$ pour $x=-\dfrac{3}{2}$ ou $x=\dfrac{4}{5}$
- $(2x+3)(5x-4)>0$ pour $x \in \left]-\infty-\dfrac{3}{2}\right[\cup \left]\dfrac{5}{4}\,;\,+\infty\right[$

II.3 Inéquations se ramenant à un produit

Exemple : Résoudre $x^2-7x<(5-x)(x-7)$

Méthode : on se ramène à une inéquation du type A(x) < 0, puis on factorise.
$x^2-7x<(5-x)(x-7) \iff x^2-7x-(5-x)(x-7)<0 \iff x(x-7)-(5-x)(x-7)<0$
$\iff (x-7)[x-(5-x)]<0 \iff (x-7)(2x-5)<0$

- $x-7=0 \iff x=7$
- $2x-5=0 \iff x=\dfrac{5}{2}$

On renseigne un tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		7		$+\infty$
Signe de $x-7$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $2x-5$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $(x-7)(2x-5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

II.4 Inéquations sous forme de quotients

Exemple : Résoudre l'inéquation $\dfrac{-3x+5}{x+1} \geqslant 2$.

Méthode : On commence par chercher l'ensemble de définition, puis on se ramène à une comparaison à 0. On factorise et enfin, on renseigne un tableau de signes.

- L'ensemble de définition est : $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Pour $x \in \mathscr{D}$, $\dfrac{-3x+5}{x+1} \geqslant 2 \iff \dfrac{-3x+5}{x+1} - 2 \geqslant 0 \iff \dfrac{(-3x+5)-2(x+1)}{x+1} \geqslant 0 \iff \dfrac{-5x+3}{x+1} \geqslant 0$.
- $-5x+3=0 \iff x = \dfrac{3}{5}$
- $x+1=0$ pour $x=-1$
- Tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
Signe de $-3x+5$		$+$	||	$+$	0	$-$	
Signe de $x+1$		$-$	||	$+$	|	$+$	
Signe de $(-3x+5)(x+1)$		$-$	||	$+$	0	$-$	

On en déduit que l'ensemble des solutions est : $\mathscr{S} =]-\infty\,;\,-1[\cup \left[\dfrac{5}{3}\,;\,=\infty\right[$.