

Fonctions : généralités

Table des matières

I	Notion de fonction	1
II	Courbe représentative	2
III	Variations d'une fonction	3
III.1	Sens de variation	3
III.2	Extremum :	4
III.3	Tableau de variation d'une fonction	5

I Notion de fonction



Soit \mathcal{D} un intervalle de \mathbb{R} ou une réunion d'intervalles.

Une fonction numérique f , définie sur \mathcal{D} , est un procédé qui, à chaque nombre de x de \mathcal{D} associe un **unique** nombre, noté $f(x)$.

Le réel x est appelé la **variable**.

$f(x)$ est l'**image** de x par f .

x est un antécédent de $f(x)$.

On écrit : $f : \begin{matrix} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{matrix}$

Exemples :

1. On enregistre la température en un endroit précis sur une période de 24 heures. $T : x \mapsto y = T(x)$ où $T(x)$ est la pression à l'instant x .
2. On enregistre la hauteur d'eau dans un port en fonction de l'heure (elle varie en fonction de la marée).
3. $v(x)$ est la vitesse d'une voiture à x km de son point de départ sur un circuit automobile .
4. $f(x)$ est la carré du nombre x : Sur $\mathbb{R} : f : x \mapsto x^2$.
5. $\mathcal{D} =]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[: f : x \mapsto \frac{1}{x}$

Remarque : $]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[$ se note aussi $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ou \mathbb{R}^*

6. $\mathcal{D} = [0 ; +\infty[: f : x \mapsto \sqrt{x}$
7. $\mathcal{D} =]0, 1[. p : x \mapsto y = p(x)$ où y est la première décimale de x .
On a alors $p\left(\frac{1}{3}\right) = 3, p(0,123) = 1$



Remarques

- Un nombre ne peut avoir qu'une seule image par une fonction f .
- Un nombre peut avoir plusieurs antécédents par f ; exemple : pour $f(x) = x^2$, on a $f(-2) = f(2) = 4$ donc 4 a deux antécédents par f

Exemples :

1. Sur \mathbb{R} , on considère la fonction $f : x \mapsto 3x^2 + 5x - 4$.

Calculer les images de 0, 3, 5 et -1.

- $f(0) = 3 \times 0^2 + 5 \times 0 - 4 = -4$
- $f(3) = 38$
- $f(5) = 3 \times 5^2 + 5 \times 5 - 4 = 96$
- $f(-1) = 3 \times (-1)^2 + 5 \times (-1) - 4 = -5$

2. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. $g(x) = x^2$.

Quels sont les antécédents de -4 ? de 2 ?

-1 a-t-il des antécédents ?

Réponses :

x est un antécédent de -4 si $g(x) = -4$, donc $x^2 = -4$.

Or, $x^2 \geq 0$ donc x^2 ne peut pas être égal à -4 qui est négatif.

-4 n'a pas d'antécédent.

Les antécédents de 2 sont les nombres x tels que $x^2 = 2$, donc $x^2 = 2$.

2 a donc pour antécédents $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

(**rappel** : pour $a \geq 0$, l'équation $x^2 = a$ possède deux solutions, $-\sqrt{a}$ et \sqrt{a} ; en effet, $x^2 = a$ s'écrit $x^2 - a = 0$, d'où $x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$ soit $(x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0$ après factorisation ; on a bien les deux solutions proposées, en utilisant le fait qu'un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.)

x est un antécédent de -1 si et seulement si $g(x) = -1$, donc si et seulement si $x^2 = -1$, ce qui est impossible car $x^2 \geq 0$.

-1 n'a pas d'antécédent par g .

II Courbe représentative



Définition

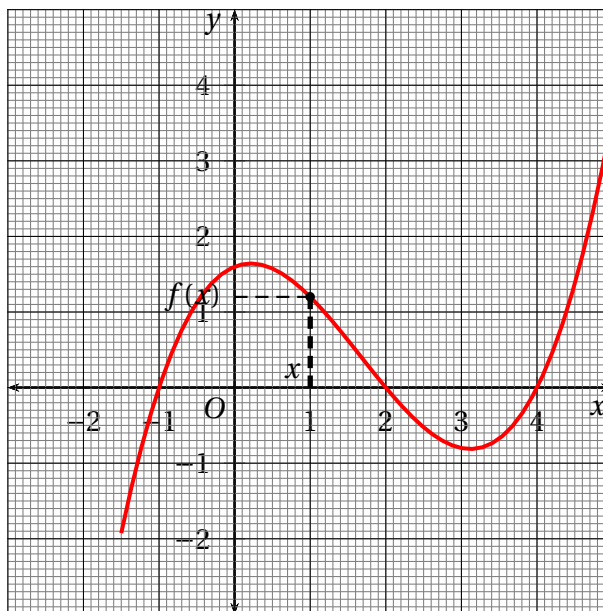
Soit f une fonction définie sur \mathcal{D} .

La courbe \mathcal{C}_f , représentative de f , est l'ensemble des points $M(x ; f(x))$ où $x \in \mathcal{D}$.

x est donc l'abscisse et $f(x)$ l'ordonnée d'un point M de la courbe \mathcal{C}_f .

Exemple :

Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-1, 5 ; 5]$



Lecture d'une image : Quelles sont les images de -1.5? de -1? de 0? de 1? de 2?

L'image de -1,5 est environ égale à -1,9; $f(-1,5) \approx -1,9$

L'image de -1 est 0 : $f(-1) = 0$

L'image de 0 est 1,6 : $f(0) = 1,6$

De même : $f(1) = 1,2$; $f(2) = 0$

Lecture d'un antécédent : Quelles sont les antécédents de 0? de 1? de 2? de 4?

Pour lire les antécédents de 0, on regarde les abscisses des points de la courbe qui ont 0 pour ordonnée :

Les antécédents de 0 sont -1, 2 et 4.

Antécédents de 1 : approximativement -0,5; 1,2 et 4,4.

Antécédents de 4 : il n'y en a pas sur l'intervalle considéré.

III Variations d'une fonction

III.1 Sens de variation

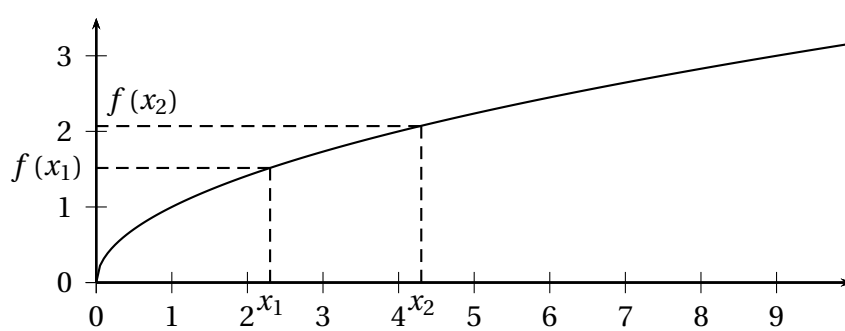


Définition

Une fonction f est croissante sur un intervalle I signifie que sur l'intervalle I , si les valeurs de la variable x augmentent, alors les images $f(x)$ augmentent aussi.

Traduction mathématique : Pour tous x_1 et x_2 de I tels que $x_1 \leq x_2$, alors $f(x_1) \leq f(x_2)$.
(une fonction croissante conserve l'ordre.)

Exemple graphique :

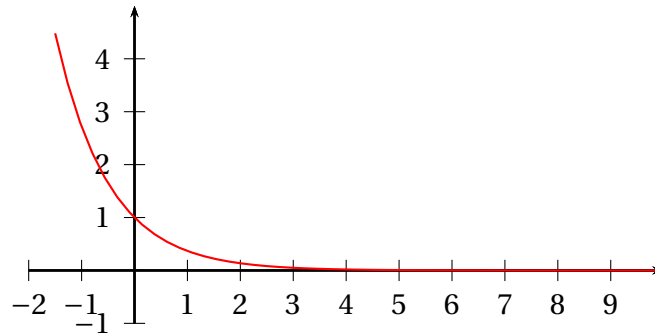


Définition

Une fonction f est décroissante sur un intervalle I signifie que sur l'intervalle I , si les valeurs de la variable x augmentent, alors les images $f(x)$ diminuent.

Traduction mathématique : Pour tous x_1 et x_2 de I tels que $x_1 \leq x_2$, alors $f(x_1) \geq f(x_2)$.
(une fonction croissante renverse l'ordre.)

Exemple graphique :



III.2 Extremum :

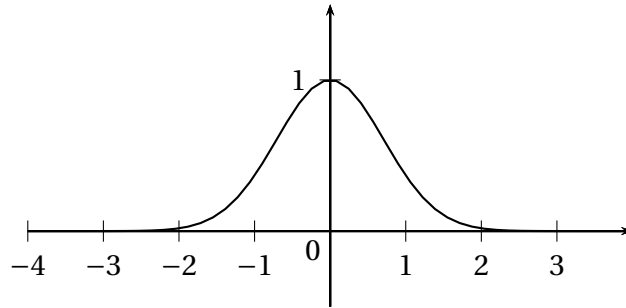


Définition

Soit f une fonction définie sur \mathcal{D} .

f admet un maximum en $a \in \mathcal{D}$ si, pour tout x de \mathcal{D} , $f(x) \leq f(a)$. f admet un minimum en $a \in \mathcal{D}$ si, pour tout x de \mathcal{D} , $f(x) \geq f(a)$. f admet un extremum en a si f admet un maximum ou un minimum.

Exemples :



Le maximum est 1, atteint en 0, mais f n'a pas de minimum.

III.3 Tableau de variation d'une fonction

Un tableau de variation sert à rassembler toutes les informations sur les variations d'une fonction.

Exemples :

1. Soit la courbe ci-dessous, représentative de la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x$



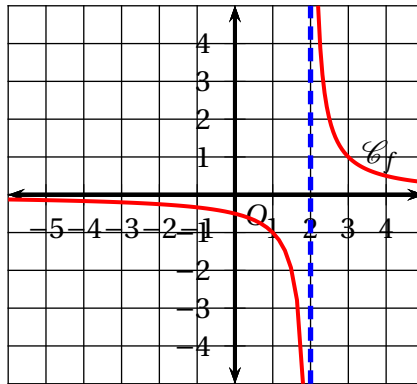
La fonction f est définie sur $[-6;3]$, croissante sur $[-6;-4]$, décroissante sur $[-4;1]$ et croissante sur $[1;3]$. On a : $f(-6) = 6$; $f(-4) = \frac{56}{3}$; $f(1) = -\frac{13}{6}$; $f(3) = \frac{21}{2}$.

Le tableau de variation est alors :

x	-6	-4	1	3
$f(x)$	6	$\frac{56}{3}$	$-\frac{13}{6}$	$\frac{21}{2}$

Arrows indicate the function is increasing from $x = -6$ to $x = -4$ and from $x = 1$ to $x = 3$, and decreasing from $x = -4$ to $x = 1$.

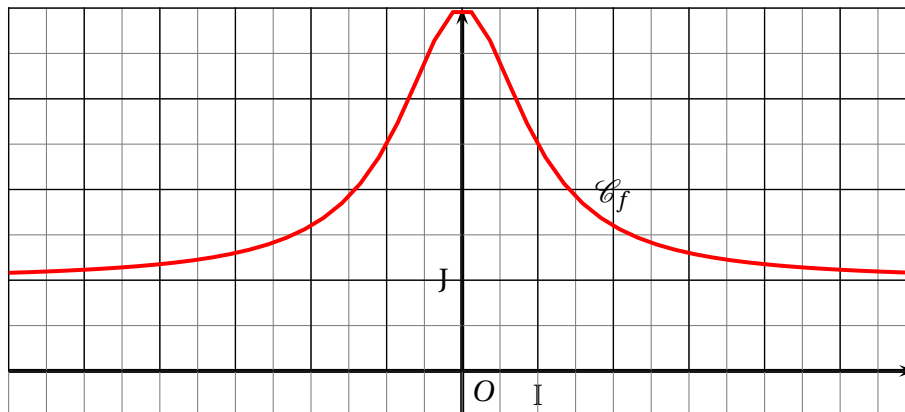
2. Soit \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{x-2}$



La fonction f n'est **pas définie** en $x = 2$. On traduit cela par une double barre verticale dans le tableau de variation. La fonction est décroissante sur $] -\infty; 2[$ et sur $] 2; +\infty[$. Quand x tend vers $-\infty$, $f(x)$ se rapproche de plus en plus de 0, de même que quand x tend vers $+\infty$. Le tableau de variation est :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x)$	0	+	$+\infty$
		-	0

3. Soit la fonction f définie par $f(x) = 1 + \frac{3}{x^2 + 1}$ dont voici la courbe représentative :



Cette fonction est définie sur \mathbb{R} , croissante sur $] -\infty; 0]$ et décroissante sur $[0; +\infty[$. Le maximum de $f(x)$ est 4 ($f(0) = 4$). Quand x tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$, $f(x)$ se rapproche de plus en plus de 1. Le tableau de variation est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$		4	
	1		1