Correction du contrôle commun n° 2

Exercice I

1. Développons les expressions suivantes : (1)

   $A(x)= (3x-4)^2-2(x+3)=9x^2-24x+16-2x-6=\boxed{9x^2-26x+10}$

   (1)

   $B(x)= =(4x+1)\left(-6x-\dfrac{3}{2}\right)=-24x^2-6x-6x-\dfrac{3}{2}=\boxed{-24x^2-12x-\dfrac{3}{2}}$

   (1)

   $C(x)= =3(5x-2)(4-x)=3\left[20x-5x^2-8+2x\right]=3\left[-5x^2+22x-8\right]=\boxed{-15x^2+66x-24}$

2. Factorisons les expressions suivantes : (1)

   $D(x)= =(x-11)(6x-5)-3(6x-5)=(6x-5)\left[(x-11)-3\right]=\boxed{(6x-5)(x-14)}$

   (1)

   $D(x)= =(7x-1)^2-64=(7x-1)^2-8^2=\left[(7x-1)+8\right]\left[(7x-1)-8\right]=(7x+7)(7x-9)=\boxed{7(x+1)(7x-9)}$

   (1)

   $D(x)= =4x^2-12x+9=(2x)^2-2\times 2x\times 3+3^2=\boxed{(2x-3)^2}$

Exercice II

Résolvons les équations ou inéquations suivantes : (1)

1. $\left(x-\dfrac{7}{3}\right)(-5x+2)=0.$

   Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

   - Premier cas : $x-\dfrac{7}{3}=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{7}{3}.$
   - Second cas : $-5x+2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{2}{5}$

   L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathcal{S}=\left\{\dfrac{2}{5}\ ;\ \dfrac{7}{3}\right\}}$

2. $x(3x-8)=4x \Leftrightarrow x(3x-8)-4x=0 \Leftrightarrow x\left[(3x-8)-4\right]=0 \Leftrightarrow x(3x-12)=0 \Leftrightarrow x\times 3(x-4)=0$ (1,5)
   $\Leftrightarrow 3x(x-4)=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0$ (en simplifiant par 3). $\boxed{\mathcal{S}=\{0\ ;\ 4\}}$

3. $(3x-1)^2-(6x+5)^2=0 \Leftrightarrow \left[(3x-1)+(6x+5)\right]\left[(3x-1)-(6x+5)\right]=0 \Leftrightarrow (3x-1+6x+5)(3x-1-6x-5)=0 \Leftrightarrow$ $(9x+4)(-3x-6)=0 \Leftrightarrow (9x+4)\times(-3)(x+2)=0 \Leftrightarrow -3(9x+4)(x+2)=0 \Leftrightarrow (9x+4)(x+2)=0$ (en simplifiant par -3).

   On en déduit : $\boxed{\mathcal{S}=\left\{-2\ ;\ -\dfrac{4}{9}\right\}}$ (1,5)

4. $5x-11\geqslant 8x+3 \Leftrightarrow 5x-8x\geqslant 3+11 \Leftrightarrow -3x\geqslant 14 \Leftrightarrow x\leqslant -\dfrac{14}{3}$ (l'inégalité change de sens puisque l'on divise par un nombre négatif). $\boxed{\mathcal{S}=\left]-\infty\ ;\ -\dfrac{14}{3}\right\}}$ (1)

5. $(3x+1)(4x-5)<7x(4x-5) \Leftrightarrow (3x+1)(4x-5)-7x(4x-5)<0 \Leftrightarrow (4x-5)\left[(3x+1)-7x\right]<0$
   $\Leftrightarrow (4x-5)(-4x+1)<0.$

   - $4x-5=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{4}$ et $4x-5<0$ pour $x<\dfrac{5}{4}$ (soit en résolvant l'inéquation, soit en remarquant que $x\mapsto 4x-5$ est une fonction affine croisante puisque le coefficient directeur est 4, nombre positif)
   - $-4x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{4}$ et $-4x+1<0$ pour $x>\dfrac{1}{4}$ (on divise par -4, négatif ou on remarque que la fonction affine $x\mapsto -5a+1$ est décroissante puisque son coefficient directeur est -4, négatif)

- On renseigne alors un tableau de signes :

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}$		$\frac{5}{4}$		$+\infty$
Signe de $4x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $-4x+1$		$+$	0	$-$		$-$	
Signe du produit		$-$	0	$+$	0	$-$	

- Conclusion : l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\infty\,;\,\frac{1}{4}\right[\cup \left]\frac{5}{4}\,;\,+\infty\right[}$ (2,5)

6. Soit l'inéquation $\dfrac{5x-1}{3+8x} \leqslant 0$

- **Ensemble de définition** : $3+8x=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{3}{8}$; la valeur interdite est $-\dfrac{3}{8}$.

  L'ensemble de définition est $\boxed{\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{8}\right\}}$.

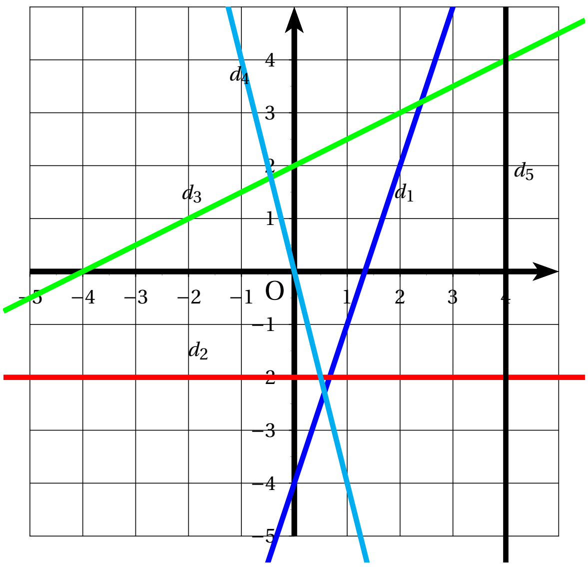
- $5x-1=0$; $x=\dfrac{1}{5}$ et $5x-1<0 \Leftrightarrow x<\dfrac{1}{5}$.
- $3+8x<0 \Leftrightarrow 8x<-3 \Leftrightarrow x<-\dfrac{3}{8}$
- On renseigne alors un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{8}$		$\frac{1}{5}$		$+\infty$
Signe de $5x-1$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
Signe de $3+8x$		$-$	‖	$+$		$+$	
Signe du produit		$+$	‖	$-$	0	$+$	

- **Conclusion** : L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \left]-\frac{3}{8}\,;\,\frac{1}{5}\right]}$ (2,5)

Exercice III

1. Déterminer, par lecture graphique, l'équation réduite de chaque droite tracée ci-dessus.



- d_1 : l'ordonnée à l'origine est -4 ; le coefficient directeur est 3 donc l'équation de d_1 est $\boxed{y=3x-4}$.
- d_2 : cette droite est parallèle à l'axe des abscisses donc son coefficient directeur est nul ; son ordonnée à l'origine est -2. Son équation est : $\boxed{y=-2}$.
- d_3 : l'ordonnée à l'origine est 2 ; le coefficient directeur est $\dfrac{1}{2}$ donc son équation est $\boxed{y=\frac{1}{2}x+2}$

- d_4 : la droite passe par l'origine ; son ordonnée à l'origine est donc 0 (fonction linéaire) ; le coefficient directeur est -4 donc son équation est $\boxed{y = -4x}$.
- d_5 : cette droite est parallèle à l'axe des ordonnées ; les abscisses de tous les points de d_5 valent 4, donc son équation est $\boxed{x = 4}$ (2,5 pt)

On considère les points suivants : A(33 ; 4) ; B(-12 ; -11) et C(8 ; -4)

2. Déterminons, par le calcul, l'équation réduite de la droite (AB). $x_A \neq x_B$ donc (AB) est sécante à l'axe (Oy).

   Son coefficient directeur est $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{-11-4}{-12-33} = \dfrac{-15}{-45} = \dfrac{1}{3}$.

   L'équation réduite de (AB) est donc $y = \dfrac{1}{3}x + b$.

   Calcul de b : les coordonnées de A vérifient cette équation donc $y_A = \dfrac{1}{3}x_1 + b \Leftrightarrow 4 = \dfrac{1}{3} \times 33 + b \Leftrightarrow 4 = 11 + b$ d'où $b = 4 - 11 = -7$. (1,5 pt)

   L'équation de (AB) est $\boxed{y = \dfrac{1}{3}x - 7}$

3. $\dfrac{1}{3}x_C - 7 = \dfrac{1}{3} \times 8 - 7 = \dfrac{8}{3} - 7 = \dfrac{8-21}{3} = -\dfrac{13}{3} \neq -4$ donc $\dfrac{1}{3}x_C \neq y_C$.
   Les coordonnées de C ne vérifient pas l'équation de la droite (AB) donc **A, B et C ne sont pas alignés**. (1 pt)

Exercice IV

On considère les fonctions définies par les expressions suivantes :

$$f(x) = -3 - 2x \,;\; g(x) = \frac{6x-2}{3} \,;\text{ et } h(x) = 5x + 2.$$

1. - Le coefficient directeur de f est $-2 < 0$, donc f est **décroissante**.
   - h a pour coefficient directeur $5 > 0$, donc h est **croissante**.

   Les tableaux de variation sont : (1 pt)

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	

x	$-\infty$		$+\infty$
$h(x)$		$\nearrow$	

2. - f est **décroissante**.
     $f(x) = 0 \Leftrightarrow -3 - 2x = 0 \Leftrightarrow -2x = 3 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$.
   - $g(x) = \dfrac{6x-2}{3} = \dfrac{6x}{3} - \dfrac{2}{3} = 2x - \dfrac{2}{3}$. Le coefficient directeur est 2, positif, donc la fonction g est **croissante**.
     $g(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$

   On en déduit les tableaux de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

(2,5 pt)

3. $f(x_B) = f(-3) = -3 - 2 \times (-3) = -3 + 6 = 3 = y_B$ donc $\boxed{B \in \mathscr{C}_f}$.

   $g(x_B) = g(-3) = \dfrac{6 \times (-3) - 2}{3} = \dfrac{-20}{3} \neq y_B$ donc $\boxed{B \notin \mathscr{C}_g}$. (1 pt)

Exercice V

Partie I :

1. Le tableau a été complété ci-dessous.

Valeurs	35	37	38	39	40	41	42	44	45
Effectifs	4	5	10	16	11	10	7	4	3
Fréquences	0,06	0,07	0,14	0,23	0,16	0,14	0,10	0,06	0,04
Effectifs cumulés croissants	4	9	19	35	46	56	63	67	70

(1 pt)

2. L'effectif est de 70.
   La moyenne est $\overline{x} = \boxed{\dfrac{2784}{70} \approx 39,77}$ (0,5 pt)

3. 70 est pair ; $70 = 2 \times 35$; la médiane est la moyenne entre les valeurs de rang 35 et 36 :
   $M = \dfrac{39+40}{2} = 39,5$: $\boxed{M = 39,5}$.
   $25\,\%70 = 17,5$ donc le premier quartile est la valeur de rang 18 : $\boxed{Q_1 = 38}$.
   $75\,\%70 = 52,5$ donc le troisième quartile est la valeur de rang 53 : $\boxed{Q_3 = 41}$. (3 pt)

4. Complétons les phrases suivantes :
   75 % des personnes interrogées ont une pointure supérieure ou égale à 38.
   25 % des personnes interrogées ont une pointure inférieure ou égale à 38
   50 % des personnes interrogées ont une pointure comprise entre 38 et 41 (si on utilise les deux quartiles).
   On a aussi 50 % des personnes qui ont une pointure entre 35 et 39,5 (entre la valeur minimum et la médiane) ou entre 39,5 et 45 (entre la médiane et la valeur maximum) (1 pt)

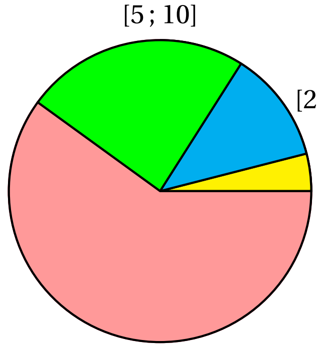
Partie II : Les résultats d'un sondage sur le temps de travail hebdomadaire des élèves de 2^nde sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Valeurs	[0 ; 2[	[2 ; 5[	[5 ; 10[	[10 ; 20[	Total
Effectifs	12	36	72	180	300
Angles en degrés	14,4	43,2	86,4	216	360

(0,5 pt)

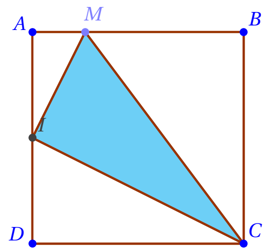
1. Pour calculer la moyenne, on utilise les milieux de chaque intervalle.
   $\overline{x} = \dfrac{(1\times 12)+(3,5\times 36)+(7,5\times 72)+(15\times 180)}{300} = \dfrac{12+124+540+2700}{300} = \dfrac{3376}{300} \approx 11,25$ (2 pt)

2. Le tableau est complété ci-dessus. Diagramme circulaire



Exercice VI

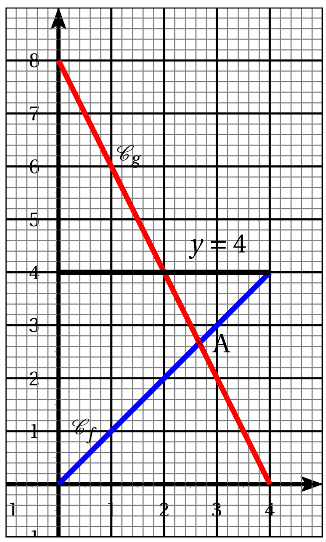
Dans la figure suivante, ABCD est un carré de 4 cm de côté, le point I est le milieu du segment [AD] et le point M appartient au segment [AB]. On notera A$M = x$



(0,5 pt)

1. M varie entre A et B, donc $\boxed{x \in [0\,;\,4]}$. (0,5 pt)
2. L'aire du triangle IDC est $\mathscr{A}(\text{IDC}) = \dfrac{\text{ID} \times \text{DC}}{2} = \dfrac{2 \times 4}{2} = 4$.
3. L'aire du triangle rectangle AMI vaut :
   $\mathscr{A}(\text{A}MI) = f(x) = \dfrac{\text{A}M \times \text{AI}}{2} = \dfrac{x \times 2}{2} = x$ donc $\boxed{f(x) = x}$. (0,5 pt)
4. L'aire du triangle rectangle MBC est $g(x) = \dfrac{M\text{B} \times \text{BC}}{2} = \dfrac{(4-x) \times 4}{2} = 2(4-x) = 8-2x$ donc $\boxed{g(x) = 8-2x}$ (1 pt)

   Partie II :
5. Représentons les fonctions $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto 8-2x$.



(1 pt)

6. L'aire de AMI est supérieure ou égale à celle de l'aire de MBC correspond à l'inéquation $x \geqslant 8-2x$, c'est-à-dire $f(x) \geqslant g(x)$.
   Graphiquement, on trouve que x doit être **supérieur à environ 2,6**. (0,5 pt)
7. On résout l'équation $f(x) \geqslant g(x)$:
   $x \geqslant 8-2x \Leftrightarrow 3x \geqslant 8 \Leftrightarrow \boxed{x \geqslant \dfrac{8}{3}}$.
   L'aire de AMI est supérieure ou égale à celle de l'aire de MBC pour $x \geqslant \dfrac{8}{3}$. (1 pt)
8. On trace sur le même graphique la droite d'équation $y = 4$ (voir ci-dessus).
   Les valeurs de x pour lesquelles l'aire de MBC est inférieure ou égale à celle de IDC sont les solutions de l'inéquation $8-2x \leqslant 4$, donc les valeurs de x pour lesquelles la courbe $\mathscr{C}_g$ est en dessous de la droite d'équation $y = 4$.
   Graphiquement, on trouve que x doit être supérieur ou ; égal à 2 : $\boxed{\mathscr{S} = [2\,;\,4]}$.

(1 pt)