# $2^{\text{nde}}$ : correction du devoir sur feuille n° 2

## I

$f$ est une fonction définie sur l'intervalle $I = [- \ ; \ 8]$. Son tableau de variation est :

$$\begin{array}{|c|ccccccccc|}
\hline
x & -7 & & -3 & & 1 & & 3 & & 8 \\
\hline
 & & & 5 & & & & 0 & & \\
f(x) & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & 1 & & & & -2 & & & & -4 \\
\hline
\end{array}$$

1. Compléter les inégalités suivantes avec le symbole « < » ou « > » en **justifiant** votre réponse :

   (a) $-6 < -4$ et -6 et -4 appartiennent à l'intervalle [-7 ; -3] sur lequel la fonction est croissante, donc $\boxed{f(-6) < f(-4)}$

   (b) $-2 < -1$ et -2 et -1 appartiennent à l'intervalle [-3 ; 1] sur lequel la fonction est décroissante, donc $\boxed{f(-2) > f(-1)}$

   (c) $4 < 5$ et 4 et 5 appartiennent à l'intervalle $[3 ; 8]$ sur lequel la fonction est décroissante, donc $\boxed{f(4) > f(5)}$

   (d) Sur l'intervalle [-7 ; -3], le minimum de $f$ est 1 ; sur $[3 ; 8]$, $f$ est décroissante et le maximum de $f$ sur cet intervalle est 0 ; $-4 \in [-7 \ ; \ -3]$ donc $f(-4) > 1$ ; de même, $f(2) < 0$.
   Par conséquent : $f(-4) > 1 > 0 > f(2)$ donc $\boxed{f(-4) > f(2)}$.

2. Recopier et compléter les phrases suivantes :

   (a) Le maximum de $f$ sur l'intervalle $[-7 ; 8]$ est $\boxed{5}$ ; il est obtenu pour $\boxed{x = -3}$.

   (b) Le maximum de $f$ sur l'intervalle $[1 \ ; \ 8]$ est $\boxed{0}$ ; il est obtenu pour $\boxed{x = 3}$.

   (c) Le minimum de $f$ sur l'intervalle $[-7 \ ; \ 8]$ est $\boxed{-4}$ ; il est obtenu pour $\boxed{x = 8}$.

## II

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x+3)^2 - 49$.

1. **Développement** : $f(x) = 4x^2 + 12x + 9 - 49 = \boxed{4x^2 + 12x - 40}$ (en utilisant une identité remarquable)

2. **Factorisation** : $f(x) = (2x+3)^2 - 49 = (2x+3)^2 - 7^2 = a^2 - b^2$ en posant $\begin{cases} a = (2x+3 \\ b = 7) \end{cases} = (a+b)(a-b) = [(2x+3)+7][(2x+3)-7] = \boxed{(2x+10)(2x-4)}$.
   On remarque que $2x+10 = 2(x+5)$ et $2x-4 = 2(x-2)$ donc on peut aussi écrire :
   $f(x) = 2(x+5) \times 2(x-2)$ donc $\boxed{f(x) = 4(x+5)(x-2)}$.

3. (a) $f(0) = 4 \times 0^2 + 12 \times 0 - 40 = -40$ : $\boxed{f(0) = -40}$

   (b) $f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = \left(2 \times \left(-\dfrac{3}{2} + 3\right)\right)^2 - 49 = 2(-3+3)^2 - 49 = 2 \times 0^2 - 49 = -49$ donc $\boxed{f\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -49}$

   (c) $f(x) = -40 \Leftrightarrow 4x^2 + 12x - 40 = -40 \Leftrightarrow 4x^2 + 12x = 0 \Leftrightarrow 4x(x+3) = 0$.
   Dans $\mathbb{R}$, un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.
   **Premier cas** : $4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$
   **Deuxième cas** : $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3$
   L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \{-3 \ ; \ 0\}}$

   (d) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 4(x+5)(x-2) = 0 \Leftrightarrow (x+5)(x-2) = 0$ (en divisant par 4)
   **Premier cas** : $x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$
   **Deuxième cas** : $x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
   L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \{-5 \ ; \ 2\}}$

   (e) Pour tout $x$, $(2x+3)^2 \geqslant 0$ donc $f(x) = (2x+3)^2 - 49 \geqslant -49$.
   Le minimum de $f(x)$ est donc $\boxed{-49}$, atteint pour $x = -\dfrac{3}{2}$

## III

Une personne a acheté un téléphone portable Trois opérateurs lui proposent les formules d'abonnement suivantes :

| | Abonnement mensuel fixe pour deux heures de communication | Supplément par minute commencée au-delà de deux heures |
|---|---|---|
| Formule 1 | 30 € | 0,25 € |
| Formule 2 | 15 € | 0,75 € |
| Formule 3 | 20 € | 0,5 € |

1. • $\boxed{f_1(x) = 0,25x + 30}$
   • $\boxed{f_2(x) = 0,75x + 15}$
   • $\boxed{f_3(x) = 0,5x + 20}$

2. • $f_1(x) = f_2(x) \Leftrightarrow 0,25x + 30 = 0,75x + 15 \Leftrightarrow 30 - 15 = 0,75x - 0,25x \Leftrightarrow 15 = 0,5x \Leftrightarrow x = \dfrac{15}{0,5} = \dfrac{150}{5} = 30$
   • $f_2(x) = f_3(x) \Leftrightarrow 0,75x + 15 = 0,5x + 20 \Leftrightarrow 0,75x - 0,5x = 20 - 15 \Leftrightarrow 0,25x = 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{0,25} = \dfrac{500}{25} = 20$
   • $f_1(x) = f_3(x) \Leftrightarrow 0,25x + 30 = 0,5x + 20 \Leftrightarrow 30 - 20 = 0,5x - 0,25x \Leftrightarrow 10 = 0,25x \Leftrightarrow \dfrac{10}{0,25} = x \Leftrightarrow x = \dfrac{10}{0,25} = \dfrac{1000}{25} = 40$

3. Les trois fonctions sont des fonctions affines, dont les représentations graphiques sont des droites $d_1$, $d_2$ et $d_3$.
Pour représenter une droite, on calcule les coordonnées de deux points.

$d_1$ :

| $x$ | 0 | 40 |
|---|---|---|
| $y$ | 30 | 40 |

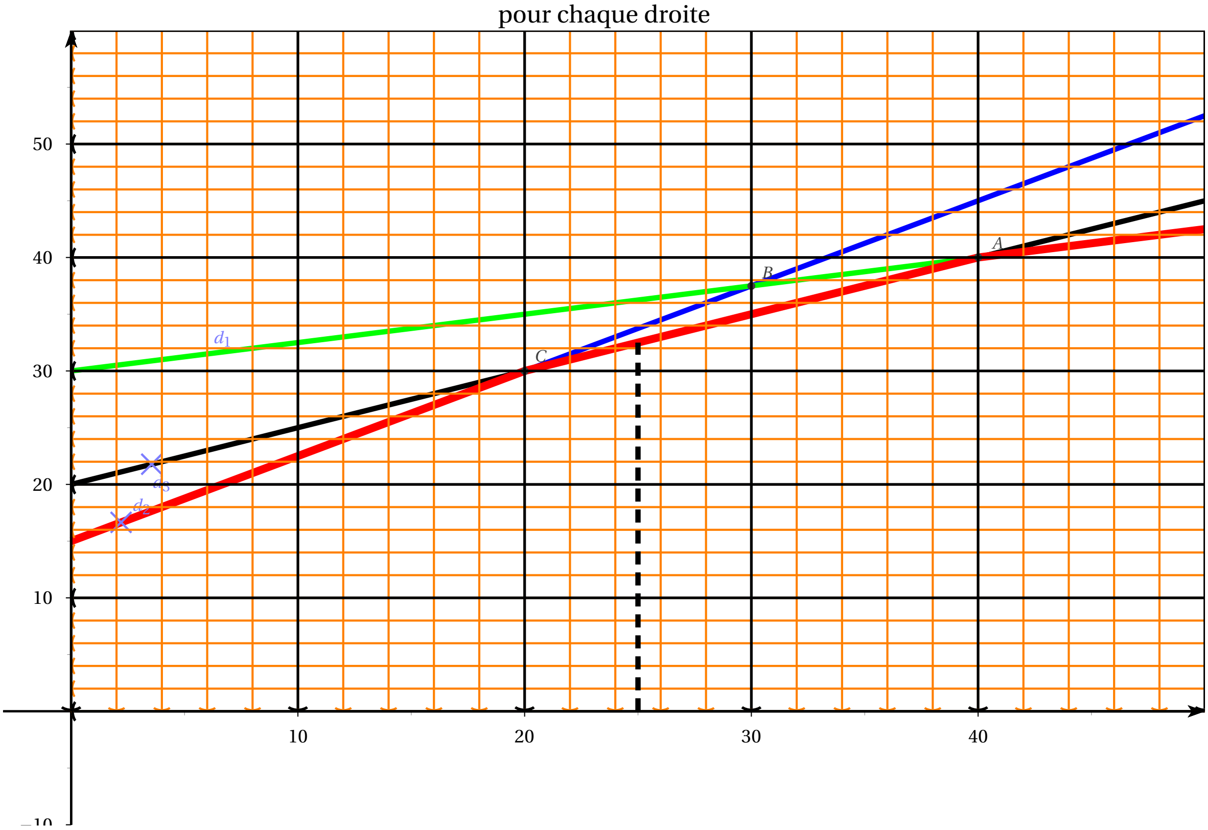
$d_2$ :

| $x$ | 0 | 40 |
|---|---|---|
| $y$ | 15 | 45 |

$d_3$ :

| $x$ | 0 | 40 |
|---|---|---|
| $y$ | 20 | 40 |

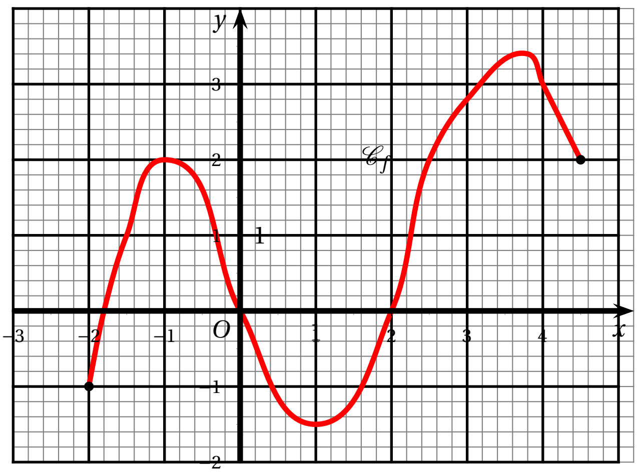
pour chaque droite




4. On trace en rouge sur le graphique précédent, la fonction qui, à $x$, associe le tarif le plus avantageux. On voit que selon les valeurs de $x$, ce n'est pas la même fonction qui convient.
5. On trace la droite parallèle à l'axe des ordonnées et passant par le point de coordonnées (25 ; 0). On voit sur la graphique que le forfait le plus avantageux est celui de la formule 3.
On peut vérifier par le calcul : $f_1(25) = 36,25$, $g(25) = 33,75$ et $h(25) = 32,5$.

## IV

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction (voir ci-dessous).




1. La fonction $f$ est définie sur [-2 ; 4,5].
2. $\boxed{f(-1) = 2}$ ; $\boxed{f(1) = -1,5}$, $\boxed{f(2) = 0}$ et $\boxed{f(4,5) = 2}$.
3. Pour trouver les antécédents de 1, on trace la droite parallèle à l'axe des abscisses et qui passe par le point de coordonnées (0,1) [en pointillés sur le dessin). on regarde alors les abscisses des points d'intersection de cette droite avec la courbe $\mathscr{C}_f$. Les antécédents de 1 sont approximativement -1,5, -0,3 et 2,2.
Les antécédents de 0 sont les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ avec l'axe des abscisses ; ce sont approximativement -1,8, 0 et 2.
4. L'équation $f(x) = 0$ a trois solutions (voir question précédente).
Les solutions sont -1,8, 0 et 2.
5. Les solutions de l'équation $f(x) = 2$ sont les abscisses des points de la courbe qui ont une ordonnée égale à 2. Ce sont : -1, 2,5 et 4,5.
6. L'équation $f(x) = 4$ n'a **pas de solution**, puisqu'aucun point de la courbe n'a d'ordonnée égale à 4.
7. Les abscisses $x$ des points dont l'ordonnée vérifient $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ appartiennent à $\boxed{[-0,8\ ;\ -1,5] \cup [-0,3\ ;\ 0] \cup [1\ ;\ 4,5]}$.

8. **Tableau de variation de $f$ :**

| $x$ | $-2$ | | $-1$ | | $1$ | | $3,7$ | | $4,5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $2$ | $\searrow$ | $-1,5$ | $\nearrow$ | $3,4$ | $\searrow$ | $2$ |

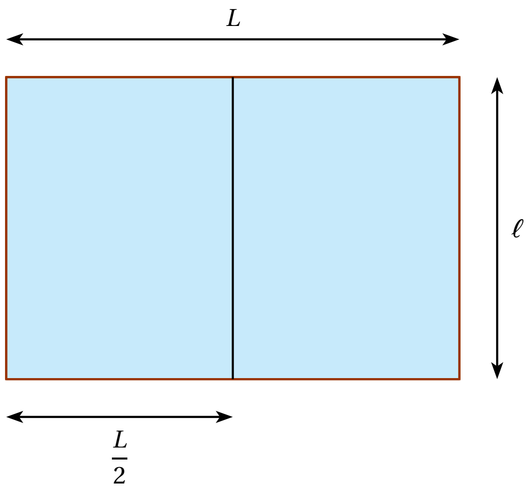
9. $\boxed{\text{Le minimum de } f \text{ est -1,5 et est atteint pour } x = 1}$.

## V Une histoire de format

On considère des rectangles de longueur $L$ et de largeur $\ell$ tels que, si l'on plie l'un d'eux, comme l'indique la figure, on obtient deux rectangles superposables et de même proportion que le précédent. Cela signifie que le rapport longueur/largeur est le même.

1. (a) On doit avoir $\frac{L}{\ell} = \frac{\ell}{\frac{L}{2}}$ d'où $\frac{L}{\ell} = \frac{2\ell}{L}$ donc $\boxed{L^2 = 2\ell^2}$.

   (b) On en déduit $\left(\frac{L}{\ell}\right) = 2$ d'où $\boxed{\frac{L}{\ell} = \sqrt{2}}$ (car ce quotient est positif, puisque c'est un quotient de longueurs).




2. **Application numérique**
Soit une feuille rectangulaire de 1 m$^2$ (format A$_0$), respectant la propriété ci-dessus (voir 1.)

   (a) Puisque l'aire vaut 1, on a $L\ell = 1$ et, comme $\frac{L}{\ell} = \sqrt{2}$, on a $\ell^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ donc $\ell = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}}$.

   De même $\boxed{L = \sqrt{\sqrt{2}}}$.

   *Remarque : on ne demande pas les valeurs approchées !*

   (b) En nommant $L_4$ et $\ell_4$ les longueur et largeur du format $A_4$, on obtient :
   $\boxed{L_4 = \frac{\sqrt{\sqrt{2}}}{4}}$ et $\boxed{\ell_4 = \frac{1}{4\sqrt{\sqrt{2}}}}$.
   On obtient $L_4 \approx 0,21$ m et $\ell_4 \approx 0,297$ m qui sont les valeurs habituelles (approchées) que l'on retient pour le format $A_4$.