On ne peut plus expliquer le monde, faire ressentir sa beauté à ceux qui n'ont aucune connaissance profonde des mathématiques (Richard Feynmnn)

2^nde^ : devoir sur feuille n° 2

I

f est une fonction définie sur l'intervalle $I = [- \,;\, 8]$. Son tableau de variation est :

x	-7		-3		1		3		8
$f(x)$	1	↗	5	↘	-2	↗	0	↘	-4

1. Compléter les inégalités suivantes avec le symbole « < » ou « > » en **justifiant** votre réponse :
   (a) $f(-6) \cdots f(-4)$
   (b) $f(-2) \cdots f(-1)$
   (c) $f(4) \cdots f(5)$
   (d) $f(-4) \cdots f(2)$
2. Recopier et compléter les phrases suivantes :
   (a) Le maximum de f sur l'intervalle $[-7\,;\,8]$ est ...; il est obtenu pour $x = \cdots$.
   (b) Le maximum de f sur l'intervalle $[1\,;\,8]$ est ...; il est obtenu pour $x = \cdots$.
   (c) Le minimum de f sur l'intervalle $[-7\,;\,8]$ est ...; il est obtenu pour $x = \cdots$.

II

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x+3)^2 - 49$.

1. Développer $f(x$.
2. Factoriser $f(x)$.
3. En utilisant la forme la mieux adaptée de $f(x)$:
   (a) Calculer $f(0)$.
   (b) Calculer $f\left(-\dfrac{3}{2}\right)$.
   (c) Résoudre l'équation $f(x) = -40$.
   (d) Résoudre l'équation $f(x) = 0$
   (e) Montrer que le minimum de $f(x)$ est -49. Pour quelle valeur est-il atteint ?

III

une personne a acheté un téléphone portable Trois opérateurs lui proposent les formules d'abonnement suivantes :

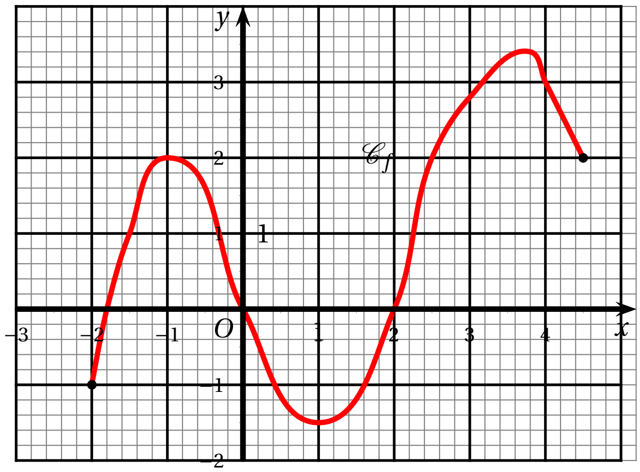
	Abonnement mensuel fixe pour deux heures de communication	Supplément par minute commencée au-delà de deux heures
Formule 1	30 €	0,25 €
Formule 2	15 €	0,75 €
Formule 3	20 €	0,5 €

L'objectif est de de choisir la formule la plus avantageuse suivant le temps de dépassement du forfait.
Pour cela, on note x le nombre de minutes au-delà des deux heures du forfait et f_1, f_2 et f_3 les fonctions qui, à x, associent la dépense relative à chacune des formules 1, 2 ou 3.

1. Calculer $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$.
2. Résoudre les équations $f_1(x) = f_2(x)$, $f_2(x) = f_3(x)$ et $f_1(x) = f_3(x)$.
3. Représenter, dans un même repère, les trois fonctions f_1, f_2 et f_3 pour $x \in [0\,;\,50]$.
4. Tracer en rouge sur le graphique précédent, la fonction qui, à x, associe le tarif le plus avantageux.
5. Pour un mois, la personne pense déasser le forfait de 25 minutes. Quel forfait doit-elle choisir ?

IV

$\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction (voir ci-dessous).

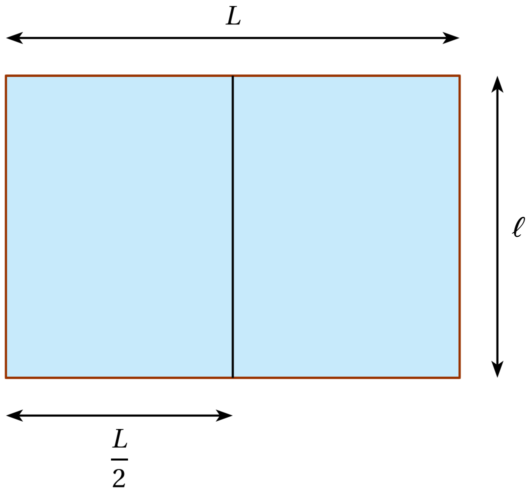


1. Sur quel intervalle I la fonction est-elle définie ?
2. Quelle est l'image par f de -1 ? de 1 ? de 2 ? de 4,5 ?
3. Quels sont les antécédents de 1 ? Expliquer votre méthode.
   Quels sont les antécédents de 0 ? Expliquer votre méthode.
4. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$. Expliquer votre méthode.
   Quelles sont ces solutions ?
5. Quelles sont les solutions de l'équation
   $f(x) = 2$? Expliquer
6. Combien l'équation $f(x) = 4$ a-t-elle de solutions ? Expliquer votre méthode.
7. Donner à partir du graphique les abscisses des points dont l'ordonnée vérifie $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.
8. Dresser le tableau de variations de f.
9. Déterminer le minimum de f et préciser pour quelle valeur de x il est atteint.

V Une histoire de format

On considère des rectangles de longueur L et de largeur ℓ tels que, si l'on plie l'un d'eux, comme l'indique la figure, on obtient deux rectangles superposables et de même proportion que le précédent. Cela signifie que le rapport longueur/largeur est le même.

1. (a) Montrer que, dans ces conditions, l'on a : $L^2 = 2\ell^2$.
   (b) En déduire que le quotient $\dfrac{L}{\ell}$ vaut $\sqrt{2}$.



2. **Application numérique**
   Soit une feuille rectangulaire de 1 m^2 (format A_0), respectant la propriété ci-dessus (voir 1.)
   (a) Quelles sont ses dimensions ?
   (b) En coupant cette feuille en deux, on obtient deux feuilles de format A_1,puis en coupant cette dernière feuille en deux, on obtient deux feuilles de format A_2, etc. (voir figure)
   Quelles sont les dimensions d'une feuille A_4 ?
   Donner les valeurs exactes puis approchées.
   Ces dimensions vous sont-elles familières ?