TS : correction du devoir sur feuille n° 1

I

u est une suite arithmétique telle que $\begin{cases} u_{11} = 9 \\ u_{22} = 42 \end{cases}$.

On sait que, pour tout p, $u_n = u_p + (n-p)r$ où r est la raison.

Alors : $u_{22} = u_{11} + 11r$ d'où $r = \dfrac{u_{,,2} - u_{11}}{11} = \dfrac{42-9}{11} = \dfrac{33}{11} = 3$.

On en déduit : $u_6 = u_{11} + (6-11)r = 9 - 5 \times 3 = -6$: $\boxed{u_6 = -6}$

II

u est une suite géométrique telle que $\begin{cases} u_3 = -24 \\ u_6 = 192 \end{cases}$.

Pour tout p, $u_n = u_p \times q^{n-p}$ si q est la raison.

Donc : $u_6 = u_3 \times q^3$, donc $q^3 = \dfrac{u_6}{u_3} = \dfrac{192}{-24} = -8$; on en déduit $\boxed{q = -2}$.

Alors : $u_{10} = u_6 \times q^{10-6} = 192 \times (-2)^4 = 192 \times 16 = \boxed{3072}$

III

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1.$$

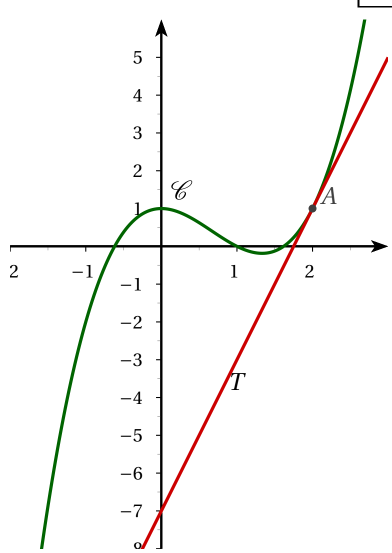
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1. (a) L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse a est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

   Or, on a : $f'(x) = 3x^2 - 2 \times 2x + 0 = 3x^2 - 4x$, d'où $f'(2) = 4$.

   $f(2) = 1$.

   L'équation de T est : $y = 4(x-2) + 1$ donc $\boxed{y = 4x - 7}$.

   (b) Il semble que la courbe $\mathscr{C}$ soit au-dessus de la tangente T.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x) - (4x - 7)$$

.

(a) On remarque que $g(x)$ est la différence entre les points de $\mathscr{C}$ et de T ayant pour abscisse x.

g est dérivable comme différence de fonctions dérivables.

Pour tout x, $g'(x) = f'(x) - 4 = 3x^2 - 4x - 4$ donc $\boxed{g'(x) = 3x^2 - 4x - 4}$

(b) $g'(x)$ est un trinôme du second degré : $\Delta = 64 > 0$; $g'(x)$ a deux racines :

$x_1 = \dfrac{4 - \sqrt{64}}{6} = -\dfrac{2}{3}$ et $x_2 = \dfrac{4+8}{6} = 2$.

Alors : $g'(x) = 3\left(x + \dfrac{2}{3}\right)(x-2)$.

$g'(x)$ est du signe de 3, coefficient de x^2 à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines et négatif entre les racines.

Tableau de signes de $g'(x)$:

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

(c) On a $g\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{256}{27} > 0$ et $g(2) = 0$ (évident puisque T est tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisses 2).

Le tableau de variation est :

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$	$\frac{256}{26}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

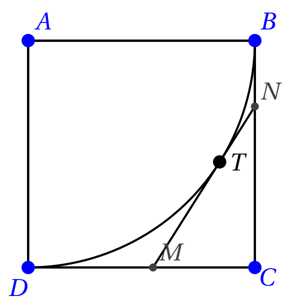
3. (a) $g(-2) = 0$.

   On en déduit que $g(x) \leqslant 0$ sur $]-\infty\,;\,-2]$ et positif sur $\left[-\dfrac{2}{3}\,;\,+\infty\right[$.

   (b) On retrouve que $\mathscr{C}$ est au-dessus de T, sur $[-2\,;\,+\infty[$.

IV *Une longueur minimale*

ABCD est un carré de côté 1. $\mathscr{C}$ est le quart de cercle d centre A, de rayon AB, contenu dans le carré.



T est un point de $\mathscr{C}$ distinct de B et D. La tangente en T à $\mathscr{C}$ coupe[DC] en M et [BC] en N.

On pose $x = DM$ et $y = BN$.

1. (a) $DM = x$ donc $MC = 1 - x$; de même, $CN = 1 - y$.
   MCN est un triangle rectangle,
   $MN^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2 = \boxed{x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2}$.
   (b) $MN = MT + TN$ (car M, T et N sont alignés dans cet ordre).
   ADM est rectangle, donc d'après le théorème de Pythagore, $AM^2 = AD^2 + DM^2 = 1 + x^2$.
   De même, AMT est rectangle (propriété de la tangente) , donc $AM^2 = AT^2 + MT^2 = 1 + MT^2$
   (car $AD = AT = 1$) d'où $MT = x$.
   On montre de même que $NT = TB = y$.
   (c) D'près ce qui précède, on a :
   $(x+y)^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$
   $\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$ donc $xy = 1 - x - y$ qui donne $y(1+x) = 1 - x$ donc $\boxed{y = \dfrac{1-x}{1+x}}$.
   Alors : $MN = x + y = x + \dfrac{1-x}{1+x} = \dfrac{x(1+x)+1-x}{1+x} = \boxed{\dfrac{x^2+1}{x+1}}$
2. f est la fonction définie sur $]0\,;\,1[$ par :
   $$f(x) = \frac{x^2+1}{x+1}.$$
   (a)
   f est dérivable sur $]0\,;\,1[$; $f = \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2+1 \\ v(x) = x+1 \end{cases}$
   $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ donc $f'(x) = \dfrac{2x(x+1) - \left(x^2+1\right)}{(x+1)^2} = \boxed{\dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}}$.
   $f'(x)$ est du signe du numérateur car le dénominateur est positif.
   On étudie le signe du numérateur : $\Delta = 8 > 0$; il a deux racines, $\dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -1-\sqrt{2} \notin [0\,;\,1[$ et $-1+\sqrt{2}$.
   Signe de $f'(x)$

x	0		$\sqrt{2}-1$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

3. MN est minimale pour $\boxed{x = \sqrt{2}-1}$

V

Étude du nombre de côtés

Pour tout entier naturel n avec $n \geqslant 1$, on note C_n le nombre de segments qui constituent le flocon à l'étape n.

1. (a)

n	1	2	3	4
C_n	3	12	48	192

   (b) Pour tout $n \geqslant 1$, comme chaque segment de l'étape n en produit 4 à l'étape suivante, $\boxed{C_{n+1} = 4C_n}$.
   La suite C est géométrique de raison 4. Ainsi pour tout $n \geqslant 1$, $\boxed{C_n = 3 \times 4^{n-1}}$.
2. **Étude du périmètre**
   Pour tout entier naturel n avec $n \geqslant 1$, on note u_n la longueur du segment à l'étape n.
   (a) Pour tout $n \geqslant 1$, comme chaque nouveau segment de l'étape $n+1$ a une longueur égale au tiers d'un segment de l'étape n, $\boxed{u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n}$.
   u est géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$
   (b) Pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{3^{n-1}}$.
   (c) Pour tout $n \geqslant 1$, $p_n = C_n \times u_n = \boxed{3 \times \left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}.}$

3. **Étude de l'aire**

Pour tout entier naturel n avec $n \geqslant 1$, on note a_n l'aire du flocon à l'étape n.

(a) L'aire d'un triangle est égale à $\dfrac{\textbf{Base} \times \textbf{Hauteur}}{2}$, d'où :

Le triangle est équilatéral, donc ses trois angles valent $\dfrac{\pi}{3}$.

On en déduit que la hauteur h vaut $h = 1 \times \sin \dfrac{\pi}{3} = 1 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Alors : $a_1 = \dfrac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{1^2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$. $\boxed{a_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}}$

(b) De l'étape n à l'étape $n+1$, l'aire est augmentée de celle des C_n triangles équilatéraux de côté u_{n+1}.

Un triangle équilatéral de côté ℓ a une aire de $\ell^2 \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

On en déduit que, pour tout $n \geqslant 1$ $a_{n+1} = a_n + C_n \times u_{n+1}^2 \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Par conséquent :

$$a_{n+1} - a_n = C_n \times u_{n+1}^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 3 \times 4^{n-1} \times \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n\right]^2 \times \frac{\sqrt{3}}{4} = 3 \times 4^{n-1} \frac{1}{9^n} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = 3 \times \frac{4^{n-1}}{9 \times 9^{n-1}} \times \sqrt{\frac{3}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{12}\left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}}$$

(c) • • $(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) = \boxed{a_n - a_1}$ (en simplifiant)

• Autre façon :

$$(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1) = \frac{\sqrt{3}}{12}\left[\left(\frac{4}{9}\right)^{n-2} + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-3} + \cdots + 1\right] = \frac{\sqrt{3}}{12}\left[1 + \frac{4}{9} + \cdots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2}\right].$$

On remarque la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique :

On obtient : $\dfrac{\sqrt{3}}{12} \dfrac{1 - \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}}{1 - \dfrac{4}{9}} = \cdots = \dfrac{3\sqrt{3}}{20}\left(1 - \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}\right)$.

On en déduit : $a_n = a_1 + \dfrac{3\sqrt{3}}{20}\left(1 - \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}\right) = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3\sqrt{3}}{20}\left(1 - \left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}\right)}$.

(d) On trouve : $\boxed{a_{50}} \approx 0,693$.

4. • Le périmètre p_n devient de plus en plus grand quand n augmente et tend vers $+\infty$, car $\dfrac{4}{3} > 1$ (justification dans le prochain chapitre).

• $-1 < \dfrac{4}{9} < 1$, donc $\left(\dfrac{4}{9}\right)^{n-1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ donc l'aire a_n tend vers $\dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3\sqrt{3}}{20} = \dfrac{2}{5}\sqrt{3}$. (justification dans le prochain chapitre)

Remarque : le flocon de Koch qui est la figure « limite » obtenue quand n tend vers $+\infty$ a une **aire finie**, mais un **périmètre infini** !