

TS : TD de rentrée (8/12)

I

Résoudre l'inéquation $3x^2 + x - 4 \geq 0$

II

Résoudre l'inéquation $2x^4 + 7x^2 - 15 = 0$

III

Soit (u_n) une suite de premier terme u_0 .
Quel est l'indice du cinquième terme?

IV

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2 + 3n + 1$.
Calculer $u_1, u_2, u_n + 1, u_{n+1}$.

V

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = u_n + n + 3 \end{cases}$.
Calculer u_1 puis u_2

VI

On pourra utiliser la calculatrice pour certaines questions.

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse (en justifiant!)

La suite v est définie par $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = v_n + v_n^2$.

- La suite v est croissante.
- $v_n \geq 1$ à partir du rang 12.
- Il existe un rang n tel que $v_n \geq 10^{10}$.
- Pour tout entier naturel n , $v_n \leq 10^{50}$.
- La suite v a pour limite 10^{50} .

TS : TD de rentrée (8/12)

I

Résoudre l'inéquation $3x^2 + x - 4 \geq 0$

II

Résoudre l'inéquation $2x^4 + 7x^2 - 15 = 0$

III

Soit (u_n) une suite de premier terme u_0 .
Quel est l'indice du cinquième terme?

IV

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2 + 3n + 1$.
Calculer $u_1, u_2, u_n + 1, u_{n+1}$.

V

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = u_n + n + 3 \end{cases}$.
Calculer u_1 puis u_2

VI

On pourra utiliser la calculatrice pour certaines questions.

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse (en justifiant!)

La suite v est définie par $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = v_n + v_n^2$.

- La suite v est croissante.
- $v_n \geq 1$ à partir du rang 12.
- Il existe un rang n tel que $v_n \geq 10^{10}$.
- Pour tout entier naturel n , $v_n \leq 10^{50}$.
- La suite v a pour limite 10^{50} .

CORRECTION

I

Résoudre l'inéquation $3x^2 + x - 4 \geq 0$. $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\text{avec } \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = -4 \end{cases} \quad \text{donc } \Delta = 49 > 0.$$

Le trinôme du second degré a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - 7}{6} = -\frac{4}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + 7}{6} = 1.$$

On sait que, si $\Delta > 0$, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a (coefficient de x^2) à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines et du signe de $-a$ entre les racines.

$$\text{On en déduit : } \mathcal{S} = \left] -\infty; -\frac{4}{3} \right] \cup [1; +\infty[$$

II

Résoudre l'inéquation $2x^4 + 7x^2 - 15 = 0$.

C'est une équation bicarrée; on effectue un changement de variable en posant $X = x^2$.

$$\text{L'équation équivaut à } \begin{cases} 2x^4 + 7x^2 - 15 = 0 \\ X = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2X^2 + 7X - 15 \\ X = x^2 \end{cases}$$

On résout l'équation du second degré, d'inconnue X : $2X^2 + 7X - 15 = 0$.

$\Delta = 169 = 13^2 > 0$; l'équation a deux racines : $X_1 = -5$ et $X_2 = \frac{3}{2}$.

Or $X = x^2$.

Les solutions de l'équation initiale sont les solutions des équations $x^2 = X_1 = -5$ et $x^2 = X_2 = \frac{3}{2}$.

• $-5 < 0$ donc $x^2 = -5$ n'a pas de solution réelle (c'est-à-dire dans l'ensemble des réels \mathbb{R}).

• $x^2 = \frac{3}{2}$ a deux solutions opposées : $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ et $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

L'ensemble des solutions de l'équation est :

$$\mathcal{S} = \left\{ -\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{3}{2}} \right\}$$

III

Soit (u_n) une suite de premier terme u_0 .

Le cinquième terme est u_4 , car il y a cinq entiers entre 0 et 4 compris.

IV

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n^2 + 3n + 1$.

- $u_1 = 1^2 + 3 \times 1 + 1 = 5$: $u_1 = 5$
- $u_2 = 2^2 + 3 \times 2 + 1 = 11$: $u_2 = 11$
- $u_n + 1 = n^2 + 3n + 1 + 1 = n^2 + 3n + 2$.
- $u_{n+1} = (n+1)^2 + 3(n+1) + 1 = n^2 + 5n + 5$

(il faut bien distinguer les écritures de $u_n + 1$ et de u_{n+1} ! les indices s'écrivent un interligne en dessous de la ligne principale)

V

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = u_n + n + 3 \end{cases}$.

On a : $u_{n+1} = u_n + n + 3$.

- $u_1 = u_{0+1} = u_0 + 0 + 3 = -5 + 0 + 3 = -2$
- $u_2 = u_{1+1} = u_1 + 1 + 3 = -2 + 1 + 3 = 2$

VI

On pourra utiliser la calculatrice pour certaines questions.

Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse (en justifiant!)

La suite v est définie par $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = v_n + v_n^2$.

a) La suite v est croissante.

Vrai puisque, pour tout n , $v_{n+1} - v_n = v_n^2 \geq 0$.

b) $v_n \geq 1$ à partir du rang 12.

Vrai, car $u_{12} \approx 1,96$ et la suite est croissante.

c) Il existe un rang n tel que $v_n \geq 10^{10}$.

Vrai : $u_{17} \approx 6,98 \times 10^{12}$

d) Pour tout entier naturel n , $v_n \leq 10^{50}$.

Faux : $u_{19} \approx 2,37 \times 10^{51}$

e) La suite v a pour limite 10^{50} . **Faux** : pour $n \geq 19$, $u_n > 10^{50}$ donc la limite éventuelle ne peut être 10^{50} ; cette suite a d'ailleurs une limite infinie.