TS : devoir sur feuille n° 1

I

u est une suite arithmétique telle que $\begin{cases} u_{11} = 9 \\ u_{22} = 42 \end{cases}$.

Calculer u_6

II

u est une suite géométrique telle que $\begin{cases} u_3 = -24 \\ u_6 = 192 \end{cases}$.

Calculer u_{10}

III

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 1.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f.

1. (a) Donner une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.

   (b) Conjecturer, en traçant $\mathscr{C}$ et T à la calculatrice, la position relative de $\mathscr{C}$ et de T.

2. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = f(x) - (4x - 7)$$

.

   (a) Déterminer la fonction dérivée g'de g.

   (b) Pour tout nombre réel, déterminer le signe de $g'(x)$.

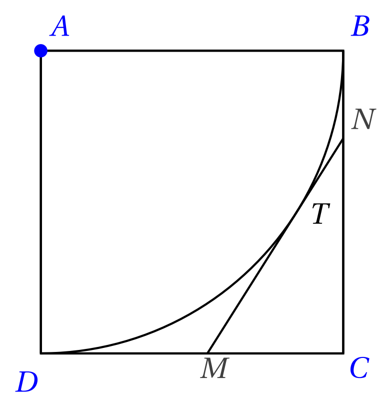
   (c) Dresser, en justifiant, le tableau de variation de g.

3. (a) Calculer $g(-2)$. Déterminer, pour tout nombre réel x, le signe de $g(x)$.

   (b) En déduire alors la position relative de $\mathscr{C}$ et de T.

IV Une longueur minimale

ABCD est un carré de côté 1. $\mathscr{C}$ est le quart de cercle d centre A, de rayon AB, contenu dans le carré.



T est un point de $\mathscr{C}$ distinct de B et D. La tangente en T à $\mathscr{C}$ coupe[DC] en M et [BC] en N.

On pose $x = DM$ et $y = BN$.

1. (a) Démontrer que $MN^2 = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$.

   (b) Établir que $MN = MT + TN = x + y$.

   (c) Exprimer alors MN en fonction de x.

2. f est la fonction définie sur $]0\ ;\ 1[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 1}.$$

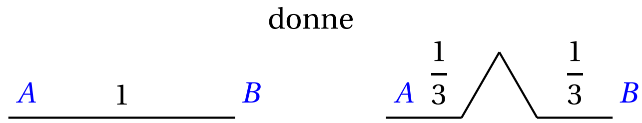
   (a) Calculer l'expression de $f'(x)$ où f' est la dérivée de f.

   (b) Étudier les variations de f.

3. Pour quelle position de M la longueur MN est-elle minimale ?

V

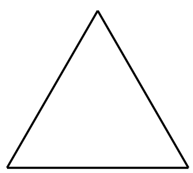
Le flocon de Koch est une figure géométrique obtenue à partir d'un triangle équilatéral par itération d'une transformation appliquée à chaque côté du triangle.



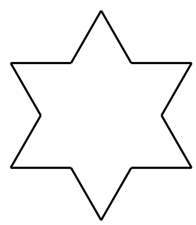
Le segment [AB] de longueur 1 se transforme en une ligne brisée de quatre segments de longueur $\dfrac{1}{3}$.

Les trois première étapes de construction du flocon sont :

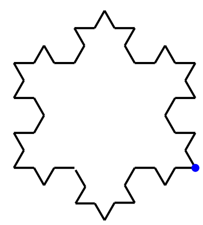
Étape 1



Étape 2



Étape 3



1. **Étude du nombre de côtés**
   Pour tout entier naturel n avec $n \geqslant 1$, on note C_n le nombre de segments qui constituent le flocon à l'étape n.
   (a) Donner les valeurs de C_1, C_2, C_3 et C_4.
   (b) Démontrer que la suite (C_n) est géométrique.
   (c) En déduire l'expression de C_n en fonction de n.
2. **Étude du périmètre**
   Pour tout entier naturel n avec $n \geqslant 1$, on note u_n la longueur du segment à l'étape n.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.
   (b) Exprimer u_n en fonction de n.
   (c) Démontrer que le périmètre du flocon à l'étape n est donné par $p_n = 3 \times \left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}$.
3. **Étude de l'aire**
   Pour tout entier naturel n avec $n \geqslant 1$, on note a_n l'aire du flocon à l'étape n.
   (a) Calculer a_1.
   (b) De l'étape n à l'étape $n+1$, l'aire est augmentée de celle des C_n triangles équilatéraux de côté u_{n+1}.
   En déduire $a_{n+1} - a_n$ en fonction de n.
   (c) Calculer $(a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \cdots + (a_2 - a_1)$ de deux façons différentes.
   En déduire la valeur de a_n pour $n \geqslant 2$.
   (d) Donner une valeur approximative de a_{50} arrondie au millième.
4. Que se passe-t-il pour le périmètre p_n quand n devient de plus en plus grand ? Et pour l'aire a_n ?