Contrôle sur les suites arithmétiques et géométriques (sujet A)

I (1,5 point)

(u_n) est une suite arithmétique de raison r. On sait que $u_5 = 3$ et $r = \frac{1}{2}$.
Calculer u_7 et u_{30}.

II (1,5 point)

La suite (u_n) est géométrique, de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 3$.
Calculer u_1 et u_5.

III (2 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 17$ et, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + 4$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. Cette suite est-elle arithmétique ou géométrique ? Donner sa raison.
3. Exprimer u_n en fonction de u_0 et de n.

IV (2 points)

(u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. On sait que $u_{17} = 24$ et $u_{40} = 70$.

1. Pour un entier $p \leqslant n$, exprimer u_n en fonction de u_p.
2. En déduire l'expression de u_{40} en fonction de u_{17} et de r, puis calculer r.
3. En déduire la valeur de u_0.

V (2 points)

Les premiers termes d'une suite sont :
-2 ; 1 ; 4 ; 7 ; 10 ; 13.

1. Sont-ce les premiers termes d'une suite arithmétique ? Pourquoi ?
2. Quel serait le septième terme de cette suite ?
3. Et le quatre cent quatre-vingt quinzième terme ?

VI (2 points)

Les premiers termes d'une suite sont :
2 ; 2,2 ; 2,42 ; 2.662 ; 2,9282.

1. Sont-ce les premiers termes d'une suite géoémtrique ? Pourquoi ?
2. Quel serait le terme suivant ?

VII (5 points)

Pierre se constitue une tirelire afin d'acheter un vélo qui coûte 150 euros.
Après un dépôt initial dans cette tirelire de 8 euros, il décide qu'à la fin de chaque mois, il déposera une somme de plus en plus grande : la somme déposée à la fin de chaque mois sera augmentée de 2 euros par rapport à celle du mois précédent. Ainsi, à la fin du premier mois, il déposera 10 euros et la tirelire contiendra 18 euros.
On note p_0 le dépôt initial et p_n la somme déposée à la fin du n-ième mois. On obtient ainsi une suite notée (p_n).

1. Calculer p_1 et p_2.
2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
3. Montrer que la suite (p_n) est arithmétique et donner sa raison.
   En déduire une expression de p_n en fonction de n.
4. (a) Quelle somme totale contiendra la tirelire au bout de deux mois ?
   (b) Montrer que la somme totale contenue dans la tirelire au bout de n mois est $(n+1)(n+8)$ (voir rappel).
5. Un ami de Pierre lui fait remarquer qu'il devra attendre 9 mois pour pouvoir acheter son vélo.
   Justifier cette affirmation.

VIII (4 points)

Un arbuste, placé dans un pot de 25 cm de haut, mesure 1 m de haut lors de l'achat chez l'horticulteur.
Il croît de 8% par an.
On appelle h_n la hauteur de l'arbuste n années après l'achat (sans la hauteur du pot).

1. Montrer que $h_1 = 1{,}08$ m.
2. Calculer h_2 et h_3.
3. Quelle est la nature de la suite (h_n) ?
4. Exprimer h_n en fonction de n.
5. Au bout de combien d'années l'arbuste atteindra-t-il le plafond, situé à 2,50 m au-dessus du sol ? (attention à la hauteur du pot !)

Rappel :

- Si (u_n) est arithmétique, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \dfrac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$.
- Si (u_n) est géométrique, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

Contrôle sur les suites arithmétiques et géométriques (sujet B)

I (1,5 point)

(u_n) est une suite arithmétique de raison r. On sait que $u_5 = 7$ et $r = \frac{1}{2}$.
Calculer u_7 et u_{30}.

II (1,5 point)

La suite (u_n) est géométrique, de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 3$.
Calculer u_1 et u_5.

III (2 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 17$ et, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + 3$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. Cette suite est-elle arithmétique ou géométrique ? Donner sa raison.
3. Exprimer u_n en fonction de u_0 et de n.

IV (2 points)

(u_n) est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. On sait que $u_{17} = 87$ et $u_{40} = 202$.

1. Pour un entier $p \leqslant n$, exprimer u_n en fonction de u_p.
2. En déduire l'expression de u_{40} en fonction de u_{17} et de r, puis calculer r.
3. En déduire la valeur de u_0.

V (2 points)

Les premiers termes d'une suite sont :
-4 ; -1 ; 2 ; 5 ; 8 ; 11.

1. Sont-ce les premiers termes d'une suite arithmétique ? Pourquoi ?
2. Quel serait le septième terme de cette suite ?
3. Et le quatre cent quatre-vingt quinzième terme ?

VI (2 points)

Les premiers termes d'une suite sont :
2 ; 2,2 ; 2,42 ; 2.662 ; 2,9282.

1. Sont-ce les premiers termes d'une suite géométrique ? Pourquoi ?
2. Quel serait le terme suivant ?

VII (5 points)

Pierre se constitue une tirelire afin d'acheter un vélo qui coûte 250 euros.
Après un dépôt initial dans cette tirelire de 9 euros, il décide qu'à la fin de chaque mois, il déposera une somme de plus en plus grande : la somme déposée à la fin de chaque mois sera augmentée de 3 euros par rapport à celle du mois précédent. Ainsi, à la fin du premier mois, il déposera 12 euros et la tirelire contiendra 21 euros.
On note p_0 le dépôt initial et p_n la somme déposée à la fin du n-ième mois. On obtient ainsi une suite notée (p_n).

1. Calculer p_1 et p_2.
2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.
3. Montrer que la suite (p_n) est arithmétique et donner sa raison.
   En déduire une expression de p_n en fonction de n.
4. (a) Quelle somme totale contiendra la tirelire au bout de deux mois ?
   (b) Montrer que la somme totale contenue dans la tirelire au bout de n mois est $(n+1)(n+8)(voirrappel)$.
5. Un ami de Pierre lui fait remarquer qu'il devra attendre 9 mois pour pouvoir acheter son vélo.
   Justifier cette affirmation.

VIII (4 points)

Un arbuste, placé dans un pot de 25 cm de haut, mesure 1 m de haut lors de l'achat chez l'horticulteur.
Il croît de 8% par an.
On appelle h_n la hauteur de l'arbuste n années après l'achat (sans la hauteur du pot).

1. Montrer que $h_1 = 1,08$ m.
2. Calculer h_2 et h_3.
3. Quelle est la nature de la suite (h_n) ?
4. Exprimer h_n en fonction de n.
5. Au bout de combien d'années l'arbuste atteindra-t-il le plafond, situé à 2,50 m au-dessus du sol ? (attention à la hauteur du pot !)

Rappel :

- Si (u_n) est arithmétique, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \dfrac{(n+1)(u_0+u_n)}{2}$.
- Si (u_n) est géométrique, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0 \times \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.