

Fonctions : généralités

Table des matières

I	Notion de fonction, courbe représentative	1
II	Variations d'une fonction	3
II.1	Sens de variation	3
II.2	Extremum :	3
II.3	Tableau de variations d'une fonction	4
III	Résolution graphique d'équations et d'inéquations	6
III.1	Équations	6

I Notion de fonction, courbe représentative



Définition

Une fonction numérique f est un procédé qui, à chaque nombre x d'une partie \mathcal{D} de \mathbb{R} , associe un nombre **unique** appelé image de x par f .

\mathcal{D} est l'ensemble de définition de f .

L'image de x par f se note $f(x)$.

On écrit : $f \mapsto f(x)$

Exemples :

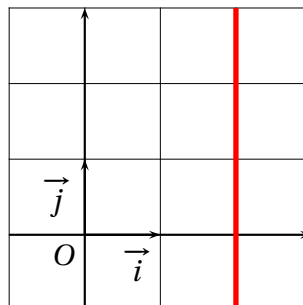
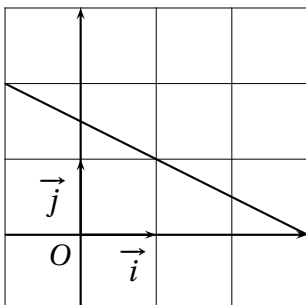
1. On enregistre la température en un endroit précis sur une période de 24 heures. $T : x \mapsto y = T(x)$ où $T(x)$ est la pression à l'instant x .
2. $v(x)$ est la vitesse d'une voiture à x km de son point de départ sur un circuit automobile.
3. $\mathcal{D} = \mathbb{R}^* : f : x \mapsto \frac{1}{x}$
4. $\mathcal{D} = \mathbb{R}^+ : f : x \mapsto \sqrt{x}$

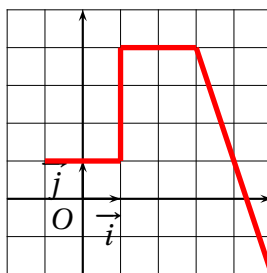
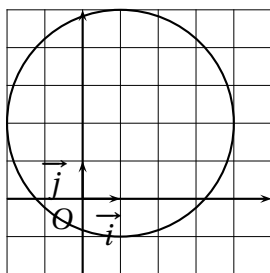


Définition

Soit f une fonction définie sur \mathcal{D} . La courbe \mathcal{C}_f , courbe représentative de f , est l'ensemble des points $M(x; f(x))$ où $x \in \mathcal{D}$.

Exercice : les courbes ci-dessous sont-elles représentatives d'une fonction ?





Définition

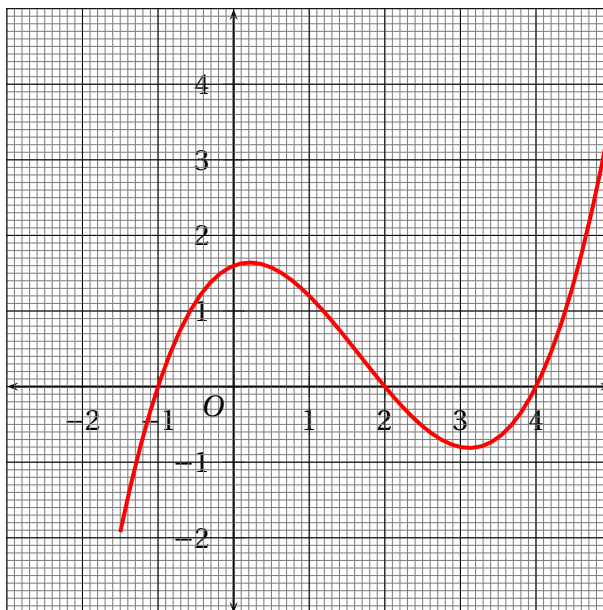
x est un antécédent de y par la fonction f si $f(x) = y$ (remarque : y peut avoir plusieurs antécédents)

Exemples :

- Sur \mathbb{R} , on considère la fonction $f : x \mapsto 3x^2 + 5x - 4$.
Calculer les images de 0, 3, 5 et -1.
- $\mathcal{D} = \mathbb{R}^+$. $g(x) = x^2$. Quels sont les antécédents de -4 ? de 2 ?
-1 a-t-il des antécédents ?

Exercice :

Voici la courbe représentative d'une fonction définie sur l'intervalle $[-1, 5 ; 5]$



Lecture d'une image : Quelles sont les images de -1.5 ? de -1 ? de 0 ? de 1 ? de 2 ?

Lecture d'un antécédent : Quelles sont les antécédents de 0 ? de 1 ? de 2 ? de 4 ?

II Variations d'une fonction

II.1 Sens de variation



Définition

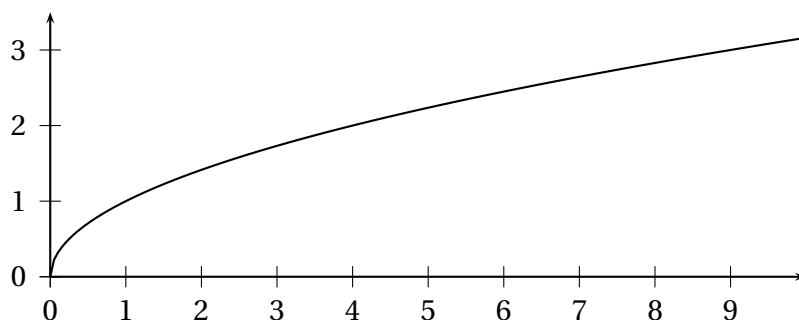
Une fonction f est croissante sur un intervalle I signifie que sur l'intervalle I , si les valeurs de la variable x augmentent, alors les images $f(x)$ augmentent aussi.

Traduction mathématique : Pour tous a et b de I tels que $a \leq b$, alors $f(a) \leq f(b)$. (une fonction croissante conserve l'ordre, c'est-à-dire que les images sont classées dans le même ordre que les antécédents.)

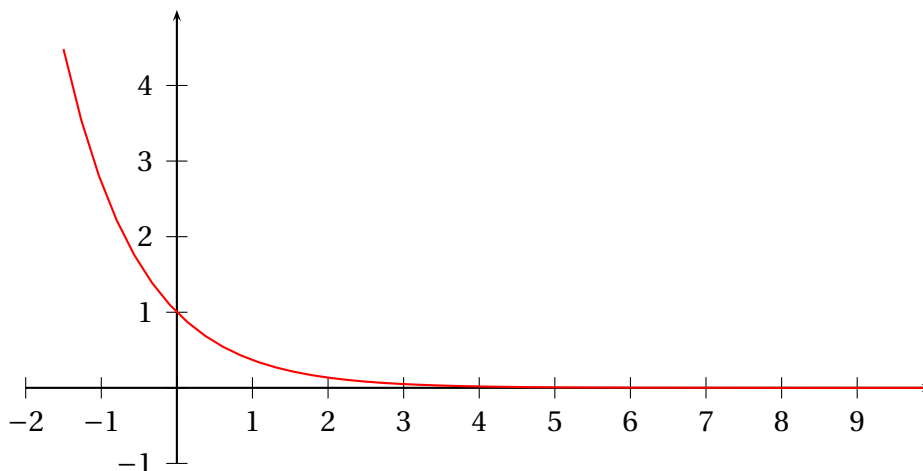
Une fonction f est décroissante sur un intervalle I signifie que sur l'intervalle I , si les valeurs de la variable x augmentent, alors les images $f(x)$ diminuent.

Traduction mathématique : Pour tous a et b de I tels que $a \leq b$, alors $f(a) \geq f(b)$. (une fonction décroissante renverse l'ordre, c'est-à-dire que les images sont classées dans l'ordre inverse des antécédents.)

Exemple graphique d'une fonction croissante :



Exemple graphique d'une fonction décroissante :



II.2 Extremum :

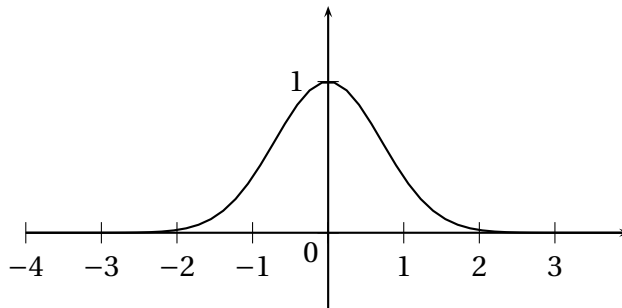
Définition

Soit f une fonction définie sur \mathcal{D} .

M est le maximum de $f(x)$ sur \mathcal{D} si, pour tout x de \mathcal{D} , $f(x) \leq M$.

m est le minimum de $f(x)$ sur \mathcal{D} si, pour tout x de \mathcal{D} , $f(x) \geq m$.

Exemples :



Le maximum est 1.

II.3 Tableau de variations d'une fonction

Un tableau de variation sert à rassembler toutes les informations sur les variations d'une fonction.

Exemples :

1. Soit la courbe ci-dessous, représentative de la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x$



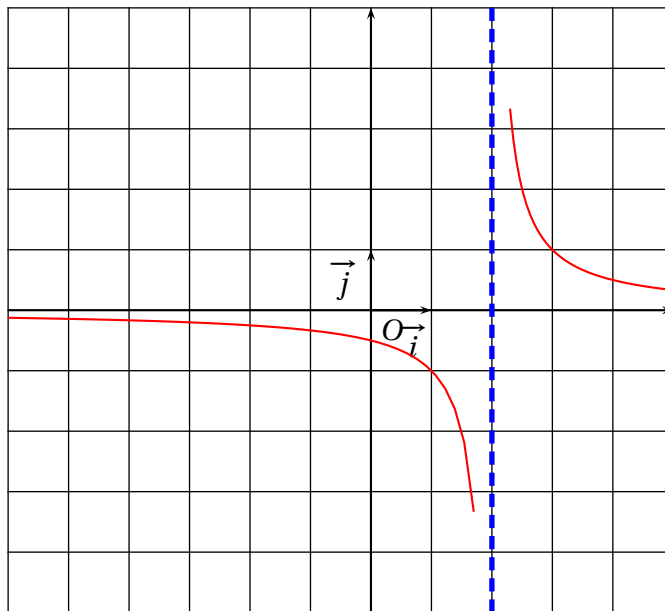
La fonction f est définie sur $[-6;3]$, croissante sur $[-6;-4]$, décroissante sur $[-4;1]$ et croissante sur $[1;3]$. On a : $f(-6) = 6$; $f(-4) = \frac{56}{3}$; $f(1) = -\frac{13}{6}$; $f(3) = \frac{21}{2}$.

Le tableau de variation est alors :

x	-6	-4	1	3
$f(x)$		$\frac{56}{3}$	$-\frac{13}{6}$	$\frac{21}{2}$

$\begin{matrix} & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow \\ & & 3 & & -\frac{13}{6} & & 2 \\ & 6 & & & & & \end{matrix}$

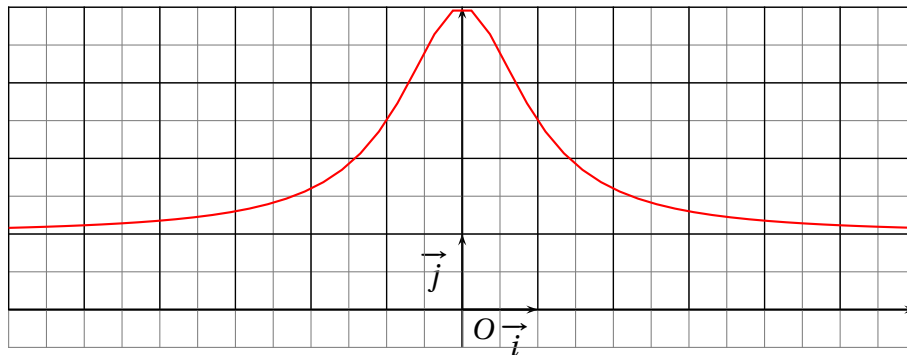
2. Soit \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{x-2}$



La fonction f n'est pas définie en $x = 2$. On traduit cela par une double barre verticale dans le tableau de variation. La fonction est décroissante sur $] \infty; 2[$ et sur $] 2; +\infty[$. Quand x tend vers $-\infty$, $f(x)$ se rapproche de plus en plus de 0, de même que quand x tend vers $+\infty$. Le tableau de variation est :

x	$-\infty$	2	2	$+\infty$
$f(x)$	0	$-\infty$	$+\infty$	0

3. Soit la fonction f définie par $f(x) = 1 + \frac{3}{x^2+1}$ dont voici la courbe représentative :



Cette fonction est définie sur \mathbb{R} , croissante sur $] -\infty; 0]$ et décroissante sur $] 0; +\infty[$. Le maximum de $f(x)$ est 4 ($f(0) = 4$). Quand x tend vers $-\infty$ ou vers $+\infty$, $f(x)$ se rapproche de plus en plus de 1. Le tableau de variation est :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	1	4	1

III Résolution graphique d'équations et d'inéquations

III.1 Équations

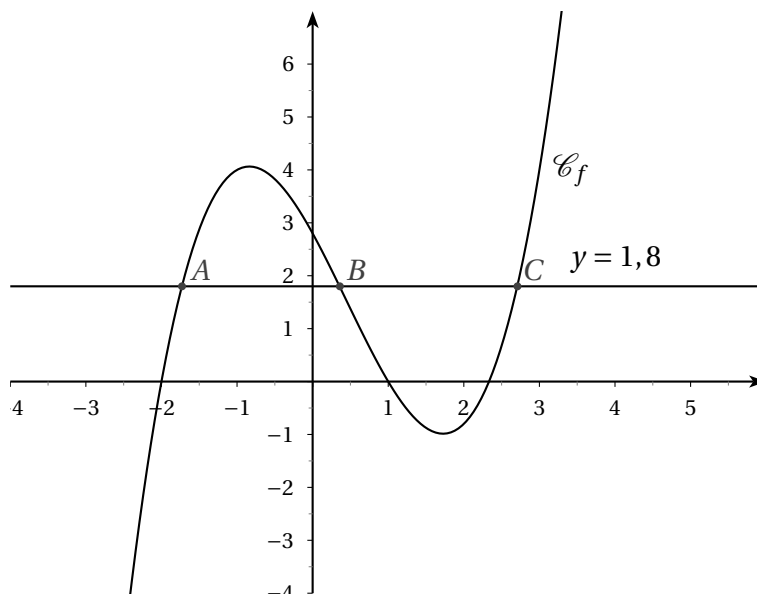
Soit f une fonction et soit \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

On considère l'équation $f(x) = k$, où k est un réel quelconque.

Pour trouver graphiquement le nombre de solutions et la valeur approchée de celles-ci ; on représente la fonction, puis on trace la droite d'équation $y = k$.

On regarde alors les points d'intersection de cette droite avec la courbe.

Exemple :



On constate graphiquement que l'équation $f(x) = 1,8$ a trois solutions ; elles valent environ -1,7, 0,4 et 2,7.