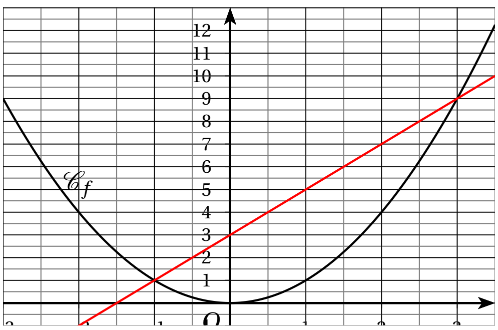
1 com : contrôle sur les fonctions usuelles

I

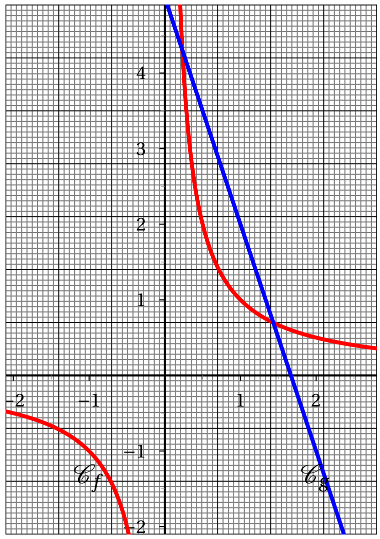
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction carré f définie par $f(x) = x^2$.

1. Voir ci-dessous.
2. Les solutions de l'équation $x^2 = 2x + 3$ sont les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, c'est -à-dire -1 et 3.
3. $f(-1) = (-1)^2 = 1$; $g(-1) = 2 \times (-1) + 3 = -2 + 3 = 1$; $f(3) = 3^2 = 9$; $g(3) = 2 \times 3 + 3 = 6 + 3 = 9$.
   $f(-1) = g(-1)$ donc -1 est bien une solution de cette équation.
   $f(3) = g(3)$ donc 3 est bien une solution de cette équation.
   $\boxed{\mathscr{S} = \{-1 ; 3\}}$



II

Ci-dessous sont représentées les fonctions f et g définies par $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]-\infty ; 0[\cup [0 ; = \infty[$ et $g(x) =$ sur $\mathbb{R}$.



1. L'équation $f(x) = g(x)$ a pour solutions les abscisses des points d'intersection des deux courbes, donc environ 0,2 et 1,5.
2. Les solutions de l'inéquation $\dfrac{1}{x} < -3x+5$ sont les abscisses des point pour lesquels l'hyperbole $\mathscr{C}_f$ est en dessous de la droite $\mathscr{C}_g$: $\mathscr{S} =]-\infty ; 0[\cup]0.2 ; 1,5[$.

III

Soit g la fonction définie sur $[0 ; 5]$ par $g(x) = -x^2 + 5x - 4$.

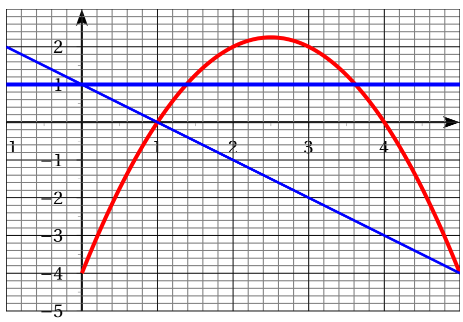
1. $(1 - x)(x - 4) = x - 4 - x^2 + 4x = -x^2 + 5x - 4$.
2. L'équation $g(x) = 0$ s'écrit donc $-x^2 + 5x - 4 = 0$ c'est-à-dire $(1 - x)(x - 4) = 0$.
   Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'n des facteurs est nul. L'équation a donc deux solutions : 1 et 4.
3. Le signe de $g(x)$ dépend des signes des deux facteurs. On renseigne un tableau de signes :

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
Signe de $1 - x$		+	0	−		−	
Signe de $x - 4$		−		−	0	+	
Signe de $(1 - x)(x - 4)$		−	0	+	0	−	

4. Voici le tableau de variation de g :

x	$-\infty$	2,5	$+\infty$
$g(x)$	↗	2,2	↘

5. Graphiquement, les antécédents de -4 par g sont 0 et 5.
   Algébriquement, on résout l'équation $-x^2 + 5x - 4 = -4$ qui s'écrit $-x^2 + 5x = 0$ donc $-x(x - 5)$ en factorisant. Ainsi retrouve-ton les solutions trouvées graphiquement.
   Graphiquement, on trouve que les antécédents de 2 sont 2 et 3.
6. On construit sur le graphique la droite d'équation $y = 1 - x$.
   Les solutions de l'équation $g(x) = 1 - x$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe et de cette droite, soit 1 et 5.
   On renseigne alors un tableau de signes ; on trouve comme solutions : $\mathscr{S} = ---\infty ; 1] \cup [5 ; +\infty[$
7. $(1 - x)(x - 5) = x - 5 - x^2 + 5x = -x^2 + 6x - 5$.
   L'inéquation $g(x) \leqslant 1 - x$ s'écrit $-x^2 + 5x - 4 \leqslant 1 - x$, c'est-à-dire $-x^2 + 6x - 5$, donc $(1 - x)(5 - x) \leqslant 0$.
8. Sur $]-\infty ; 2,5]$, g est croissante, $g(0) = -4 < 1$ et $g(2,5) \approx 2,2 > 1$ donc l'équation $g(x) = 1$ a une solution unique α.
   De même, sur $[2,5 ; +\infty[$, g est décroissante, $g(2,5) > 1$ et g(5)=-4<1 donc l'équation $g(x) = 1$ a une solution unique β sur cet intervalle.
   À la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 1,4$ et $\beta \approx 3,6$.



IV

Une entreprise fabrique des jouets qu'elle vend par lots. On admet que le coût de fabrication en euros d'un nombre x de lots, x appartenant à l'intervalle [0 ; 18], est donné par la fonction f définie par $f(x) = 4x^3 - 96x^2 + 576x + 100$ dont la courbe $\mathscr{C}$ est tracée ci-dessous.

Chaque lot est vendu 125 €. La recette est donc donnée par $R(x) = 125x$.

1. La droite (D) d'équation $y = 125x$ est tracée dans le même repère que $\mathscr{C}$.
2. L'entreprise réalise un bénéfice si la recette dépasse le coût de production. Comme x doit être entier, c'est le cas pour $7 \leqslant x \leqslant 17$.
3. (a) On appelle M Le point d'abscisse 8 qui est sur $\mathscr{C}$. Son ordonnée est $f(8) = 612$.

   (b) On appelle N le point d'abscisse 8 qui est sur (D). Son ordonnée est $125 \times 8 = 1\,000$.

   (c) La longueur MN vaut $1\,000 - 612 = 388$. Ce nombre représente le bénéfice réalisé par la vente de 8 lots.
4. Compléter le tableau de valeurs suivant :

x	4	7	10	12	13	14	17	18
Coût de production	1124	800	260	100	152	324	1 800	2 692
Recette	500	875	1 250	1 500	1 625	1 750	2 125	2 250
Bénéfice	-624	75	990	1 400	1 473	1 426	325	-442

On voit dans le tableau que le nombre de lots à vendre pour réaliser le bénéfice maximal est de 13.
On représente en rouge sur l'axe des abscisses la plage de production qui permet de réaliser un bénéfice.