Fonctions de référence

Table des matières

I Fonctions affines :

Définition

Soient m et p deux réels. La fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = mx + p$ est une fonction affine.
m est le coefficient directeur et p l'ordonnée à l'origine.
La représentation graphique d'une fonction affine est une droite, passant par le point de coordonnées $(0\ ;\ b)$.

Variations :

Soit f une fonction affine définie par : $f(x) = mx + p$.
f est croissante si, et seulement si, $m > 0$. f est constante si, et seulement si, $m = 0$.
f est décroissante si, et seulement si, $m < 0$.

Démonstration :

Soient deux nombres quelconques x_1 et x_2, avec $x_1 < x_2$.
$f(x_2) - f(x_1) = m(x_2 - x_1)$. Comme $x_2 - x_1$ est positif, $f(x_2) - f(x_1)$ est positif si $m > 0$ (f est alors croissante), constant si $m = 0$ et négatif (donc f décroissante) si $m < 0$.

Caractérisation :

> **Théorème**
> f est une fonction affine si, et seulement si, l'accroissement Δy de l'image est proportionnel à l'accroissement Δx de la variable.
> Autrement dit, x_1 et x_2 étant deux réels distincts, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m$.

Démonstration :

Si f est une fonction affine, $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m$.

Réciproque :

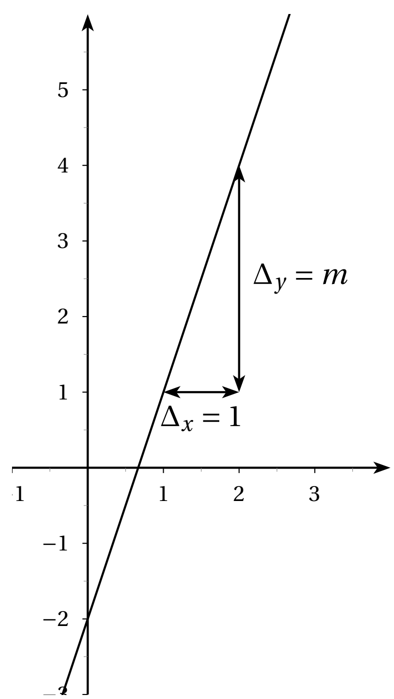
Soit f une fonction telle que, pour tous x_1 et x_2, $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = m$.

Alors, en particulier, pour x et 0, on a : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = m$ d'où, en posant $f(0) = b$, $f(x) = mx + p$.

Interprétation graphique de m : $m = \dfrac{\Delta_y}{\Delta_x}$ donc $\Delta_y = m\Delta_x$.

Si l'on prend $\Delta_x = 1$, on a $\Delta_y = m$.

Autrement dit : si l'on se déplace de 1 unité parallèlement à l'axe des abscisses, on se déplace en même temps de m parallèlement à l'axe des ordonnées.



Remarque : si l'on se déplace de k unités parallèlement à l'axe des abscisses, on se délace dans le même temps de km unités parallèlement à l'axe des ordonnées.

II Fonction carré :

II.1 Définition et propriétés

Définition

La fonction carré est la fonction définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.

Définition

Une fonction f est paire si :

- son ensemble de définition est symétrique par rapport à l'origine.
- pour tout x, $f(-x) = f(x)$.

Alors, la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Propriété

La fonction carré est paire.

Démonstration : pour tout x, $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$.

Sens de variation :

Propriété

La fonction carré est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$.

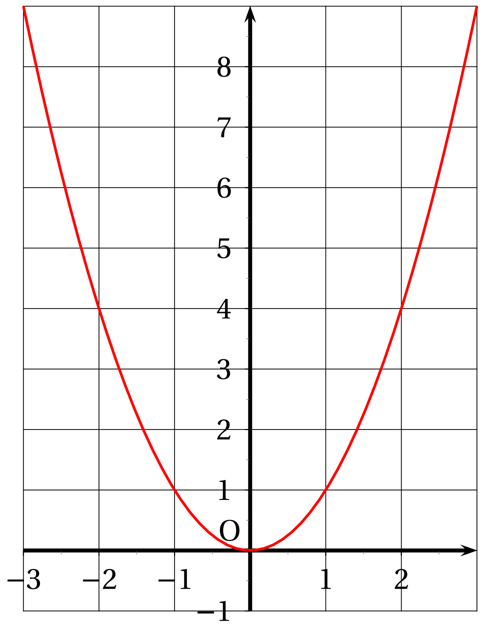
Tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Courbe :

Comme la fonction est paire, on trace d'abord la courbe sur $]-\infty\ ;\ 0]$, puis on complète par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

La courbe représentative de la fonction carré est appelée une **parabole**.



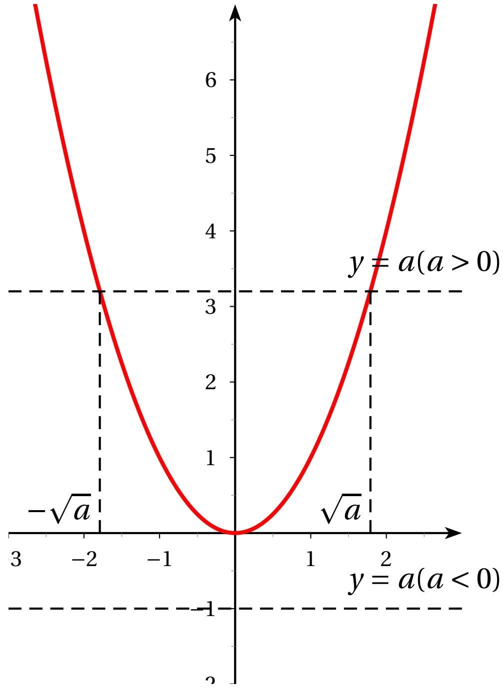
II.2 Équation $x^2 = a$

Résoudre l'équation $x^2 = a$ revient à trouver les abscisses des points d'intersection de la droite parallèle à l'axe des abscisses et passant par le point de coordonnées $(0\ ;\ a)$ avec la parabole représentative de l'équation $x^2 = a$.

Propriété

- Si $a < 0$, l'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution
- Si $a = 0$, l'équation $x^2 = a$ a pour seule solution 0
- Si $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ a deux solutions, $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

Illustration graphique :

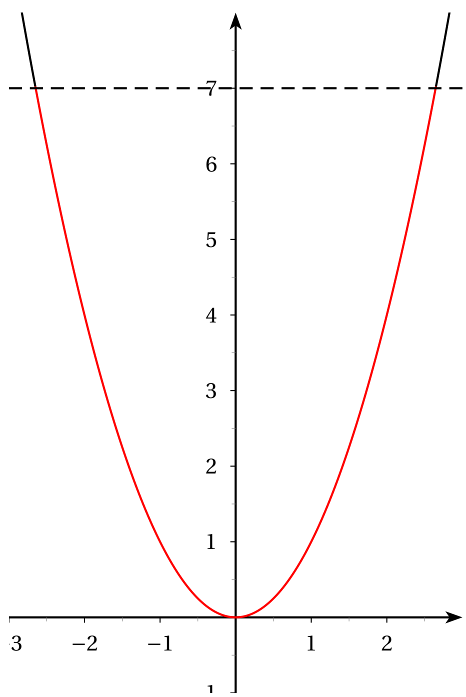


Démonstration algébrique :

- Si $a < 0$, $x^2 = a$ n'a aucune solution, puisque $x^2 \geqslant 0$.
- Si $a \geqslant 0$, $x^2 = a \Leftrightarrow x^2 - a = 0 \Leftrightarrow x^2 - \sqrt{a}^2 = 0 \Leftrightarrow (x + \sqrt{a})(x - \sqrt{a}) = 0$ qui a bien our solutions $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$.

II.3 Inéquations

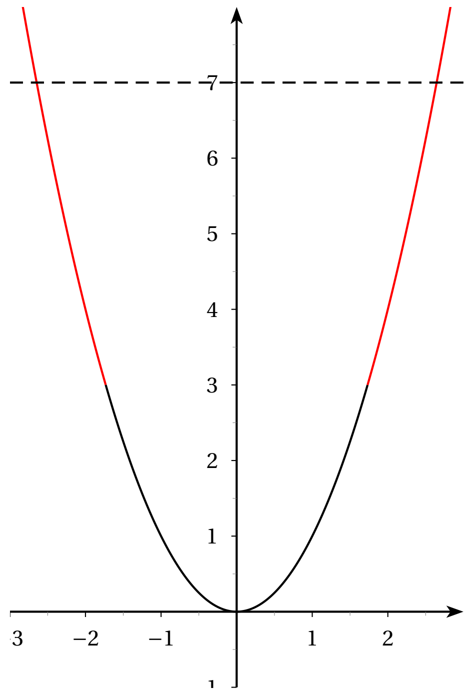
Exemple 1 : résoudre l'inéquation $x^2 \leqslant 7$ On trace dans un repère la parabole représentative de la fonction carré et la droite parallèle à l'axe (Ox) et d'ordonnée à l'origine 7.



Les solutions de l'inéquation $x^2 \leqslant 7$ sont les abscisses des points de la partie de la courbe tracée en rouge, dont les ordonnées sont inférieures ou égales à 7.
Les point d'intersection de la droite et de la parabole ont pour abscisses $-\sqrt{7}$ et $\sqrt{7}$.

On en déduit : $\boxed{\mathscr{S} = [-\sqrt{7}\,;\,\sqrt{7}]}$.

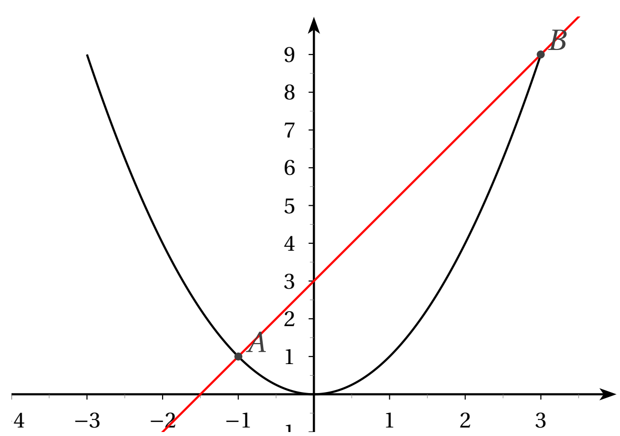
Exemple 2 : résoudre l'inéquation $x^2 > 3$ On trace dans un repère la parabolle représentative de la fonction carré et la droite parallèle à l'axe (Ox) et d'ordonnée à l'origine 3.



Les solutions de l'inéquation $x^2 \leqslant 7$ sont les abscisses des points de la partie de la courbe tracée en rouge, dont les ordonnées sont strictement supérieures à 3.
Les point d'intersection de la droite et de la parabole ont pour abscisses $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.
On en déduit : $\boxed{\mathscr{S} =]-\infty\,;\,\sqrt{3}] \cup]\sqrt{3}\,;\,+\infty[}$.

II.4 Équation $x^2 = ax + b$

Exemple : résoudre graphiquement l'équation $x^2 = 2x + 3$
On peut voir cette équation comme $f(x) = g(x)$ où f et g sont deux fonctions.
On trace alors les représentations graphiques de ces deux fonctions dans le même repère et on regarde les abscisses de points d'intersection.



On trouve que l'équation a deux solutions x_1 et x_2, qui valent approximativement -1 et 3

III Fonction inverse

III.1 Définition et propriétés

Définition

On appelle fonction inverse la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Exemples : $f(3) = \dfrac{1}{3}$; $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2$; $f(-5) = -\dfrac{1}{5}$.

Définition

Une fonction définie sur un ensemble $\mathscr{D}$ est impaire si :

- L'ensemble $\mathscr{D}$ est symétrique par rapport à l'origine.
- Pour tout x de $\mathscr{D}$, $f(-x) = -f(x)$.

La courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de f est alors symétrique par rapport à l'origine.

Propriété

La fonction inverse $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est impaire.

Démonstration :

$\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout x, $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$.

Propriété (sens de variation)

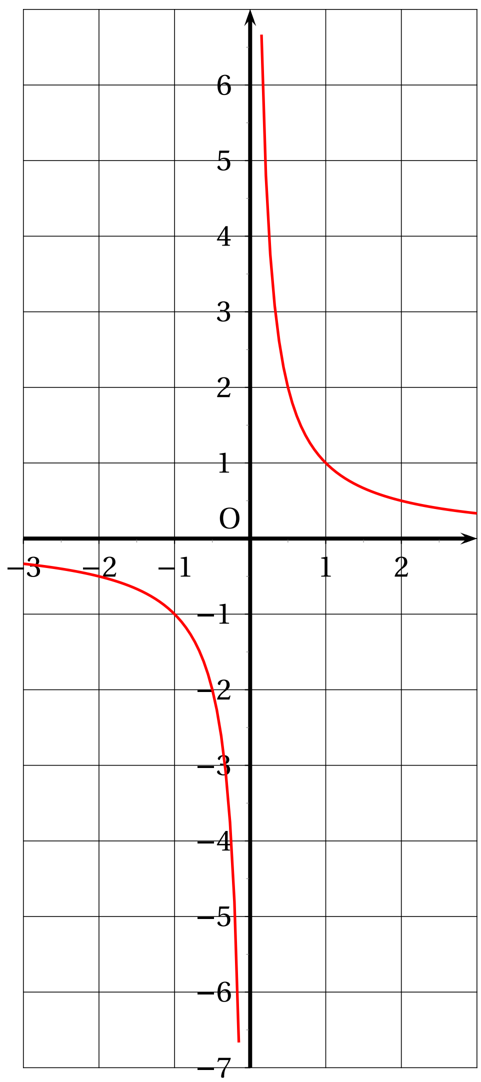
La fonction inverse $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$.

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	↘	‖	↘

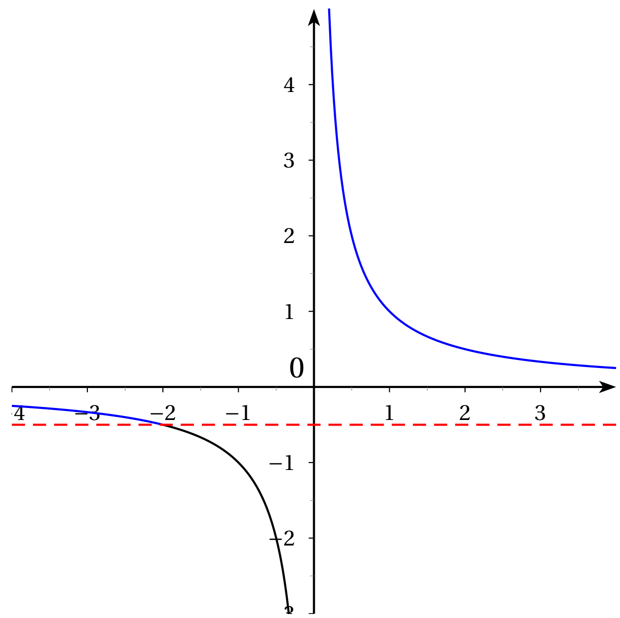
Représentation graphique :

La fonction étant impaire, on ne la trace que sur $]0.+\infty[$ et on complète par symétrie par rapport à l'origine. Les deux axes sont des « asymptotes » à la courbe, c'est-à-dire que la courbe se rapproche de plus en plus près de ces axes. La courbe représentative de la fonction inverse est appelée **hyperbole**.



III.2 Inéquation $\frac{1}{x} > -\frac{1}{2}$

On trace l'hyperbole représentative de la fonction inverse et la droite parallèle à l'axe (Ox), d'ordonnées à l'origine $-\frac{1}{2}$.



On veut $\frac{1}{x} > -\frac{1}{2}$; on cherche les points de l'hyperbole qui ont une ordonnée supérieure à $-\frac{1}{2}$.

Or, $\frac{1}{x} = -\frac{1}{2}$ pour $x = -2$.

On trouve $\boxed{\mathscr{S} =]-\infty\,;\,2]\cup]0\,;\,+\infty[}$

IV Fonction cube

IV.1 Définition

Définition

On appelle fonction cube la fonction f définie par : $f(x) = x^3$

IV.2 Variations

Propriété

La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation

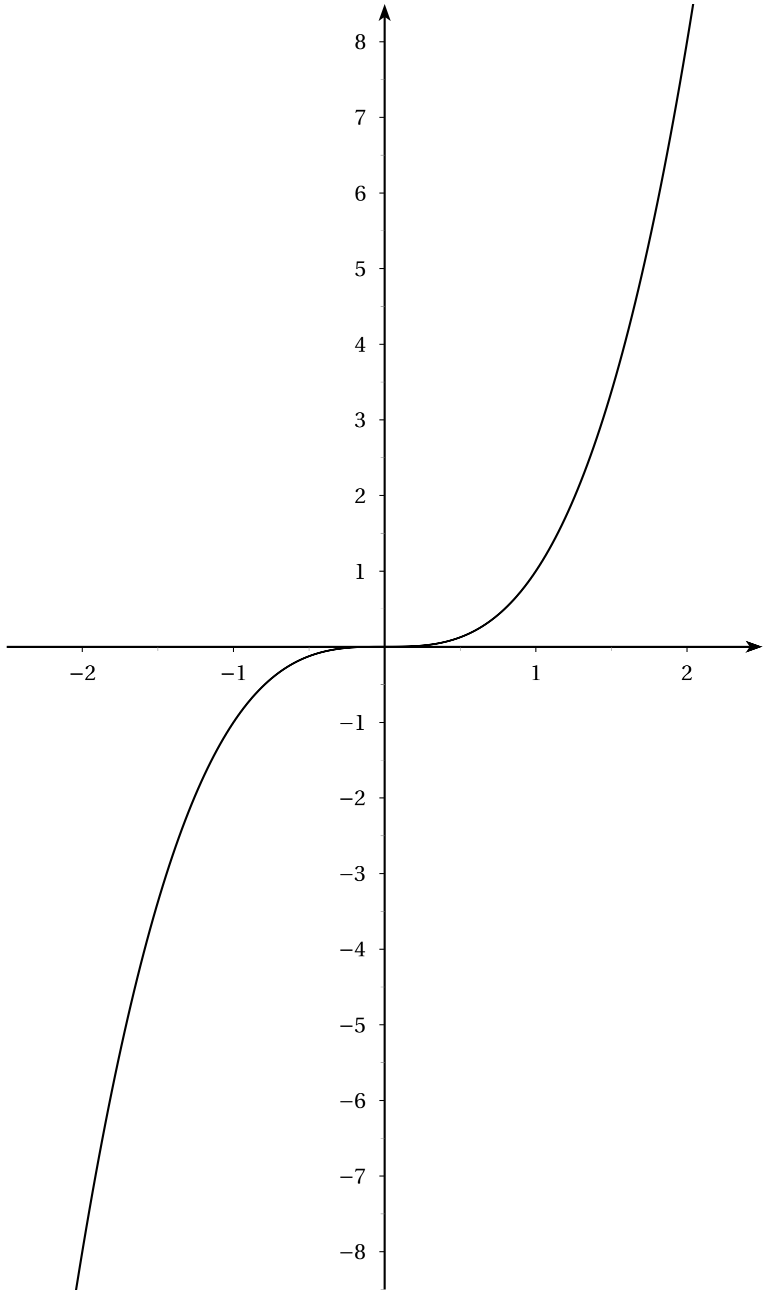
x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x) = x^3$	$\nearrow$

IV.3 Courbe

On remarque la fonction est impaire, puisque pour tout x, $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$.
On en déduit que la courbe est symétrique par rapport à l'origine O.
Tableau de valeurs :

x	0	$\frac{1}{2} = 0,5$	1	2
$f(x) = x^3$	0	$\frac{1}{8} = 0,125$	1	8

Courbe : on trace d'abord la partie correspondant à $x \geqslant 0$, puis on complète la courbe par symétrie par rapport à O.



V Fonction racine carrée

V.1 Définition

Définition

La fonction racine carrée est la fonction f, définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \sqrt{x}$

V.2 Variations

Propriété

La fonction racine carréée est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$

Tableau de variation

x	$0 \qquad +\infty$
$f(x)=\sqrt{x}$	$0 \nearrow$

V.3 Courbe représentative

Tableau de valeurs :

x	0	$\frac{1}{2}=0,5$	1	2	3	4	5	9
$f(x)=\sqrt{x}$	0	$\sqrt{\frac{1}{2}}\approx 0,7$	1	$\sqrt{2}\approx 1,4$	$\sqrt{3}\approx 1,7$	2	$\sqrt{5}\approx 2,2$	3

Courbe