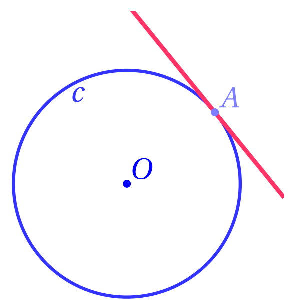
Nombre dérivé

Table des matières

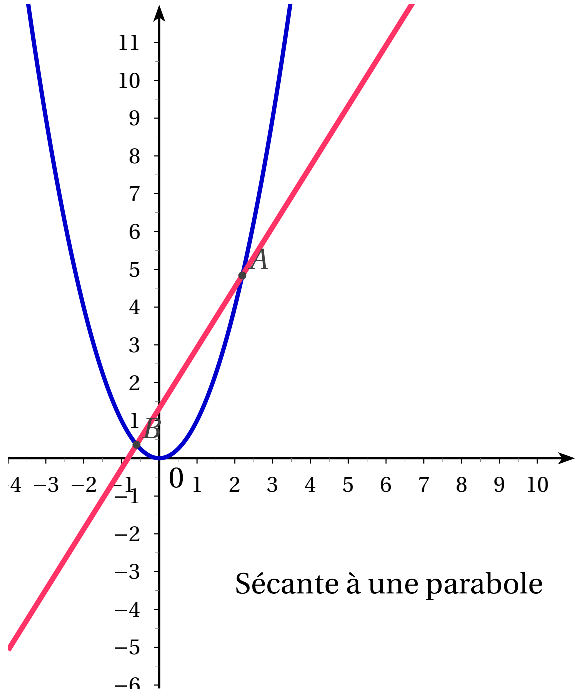
I Notion de tangente à une courbe

I.1 Tangente à un cercle

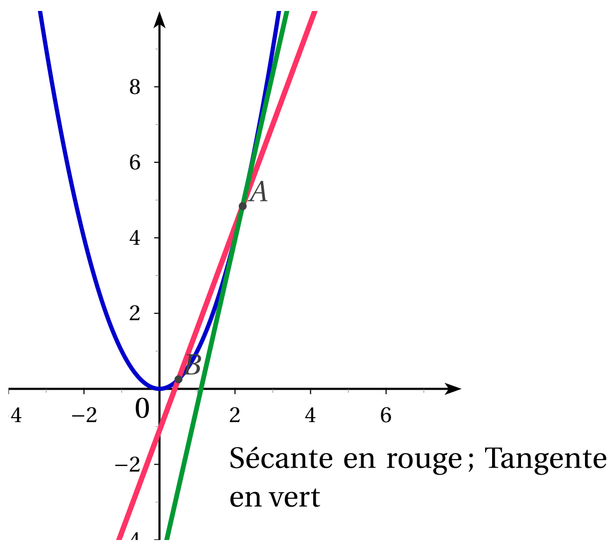


Rappel : la tangente à un cercle en A est une droite passant par A et ce point A est le **seul** point d'intersection entre la droite et le cercle.

I.2 Sécante à une parabole



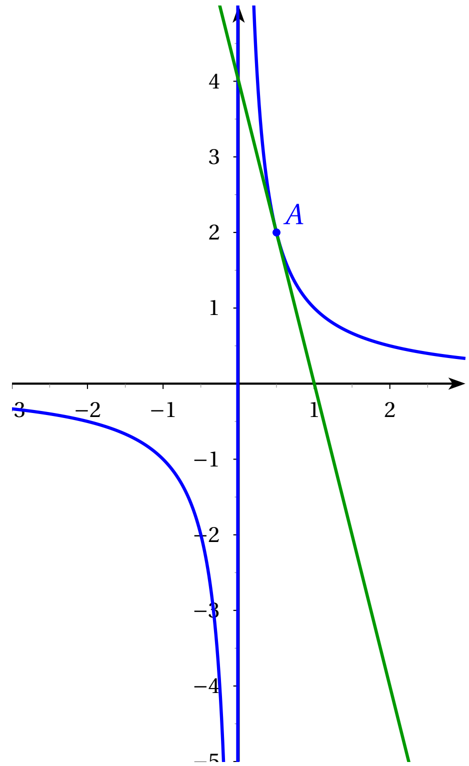
I.3 Tangente à une parabole



I.4 Comparaison entre tangente et autres droites

Sur la figure précédente, la tangente en A à la parabole est en vert ; elle ne touche la parabole qu'en A ; elle est plus « proche » de la parabole que les autres droites passant par A.

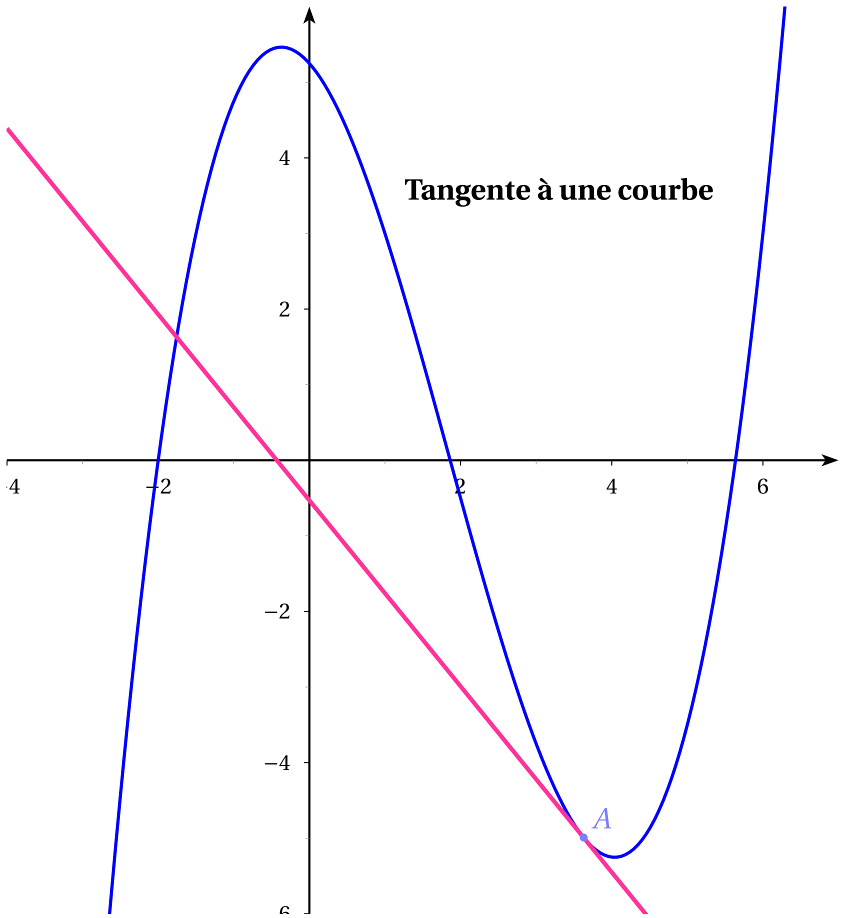
I.5 Tangente à une hyperbole



II Tangente à une courbe

Définition

Soient $\mathscr{C}$ la courbe représentative d'une fonction et un point A de cette courbe.
On admet l'existence d'une droite T, qui, parmi toutes les droites qui passent par A, est celle qui s'éloigne le moins de la courbe $\mathscr{C}$ au voisinage du point A.
Cette droite est appelée **tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en A**.



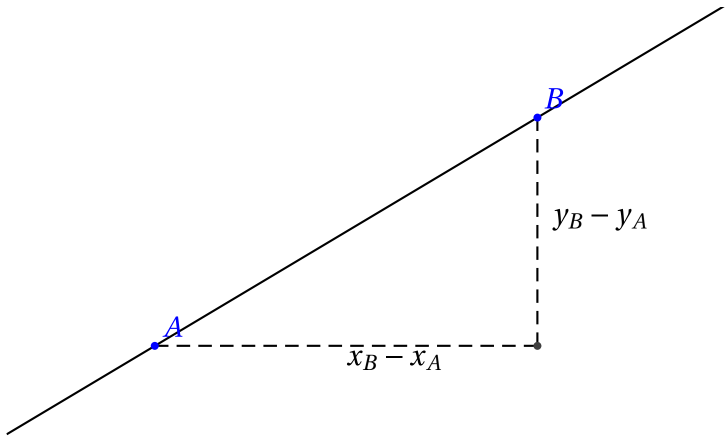
Remarque : : la tangente à une courbe ne touche la courbe **localement** qu'en un point.
Exercices : n° 9, 10 et 11 page 187

III Nombre dérivé

III.1 Coefficient directeur d'une droite

Rappel : Soient deux points A et B d'une droite sécante à l'axe des ordonnées.

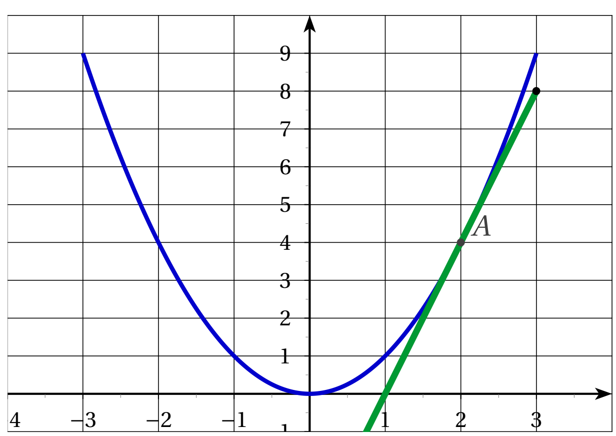
Le coefficient directeur de la droite (AB) est : $\boxed{m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$



Définition

Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative d'une fonction f.
Soit $A(a\ ;\ f(a))$ un point de $\mathscr{C}$.
Si, en A, $\mathscr{C}$ admet une tangente, on dit que f est dérivable en a. On appelle alors nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$, le coefficient directeur de la tangente.

Exemple :



La tangente en A à $\mathscr{C}$ passe par les points de coordonnées $(2\ ;\ 4)$ et $(3\ ;\ 8)$; le coefficient directeur de la tangente est donc : $\dfrac{8-4}{3-1} = \dfrac{4}{1} = 4$.

Le nombre dérivé de f en 2 est : $\boxed{f'(2) = 4}$.

Propriété

L'équation réduite de la tangente en a est alors : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Remarque : la tangente en a est parallèle à l'axe des abscisses équivaut à $f'(a) = 0$.
Exemple : la parabole représentative de la fonction carré $x \mapsto x^2$ en 0.

Exercices n° 12 à 19 page 1889

IV Nombres dérivées pour les fonctions de référence

IV.1 Fonction affine

Soit f définie par $f(x) = mx + p$ et soit $A(a\,;\,f(a))$ un point de la droite $\mathscr{D}$ représentative de f.
La tangente à $\mathscr{D}$ en a est la droite $\mathscr{D}$ elle-même, donc $f'(a) = m$.

IV.2 Fonction carré

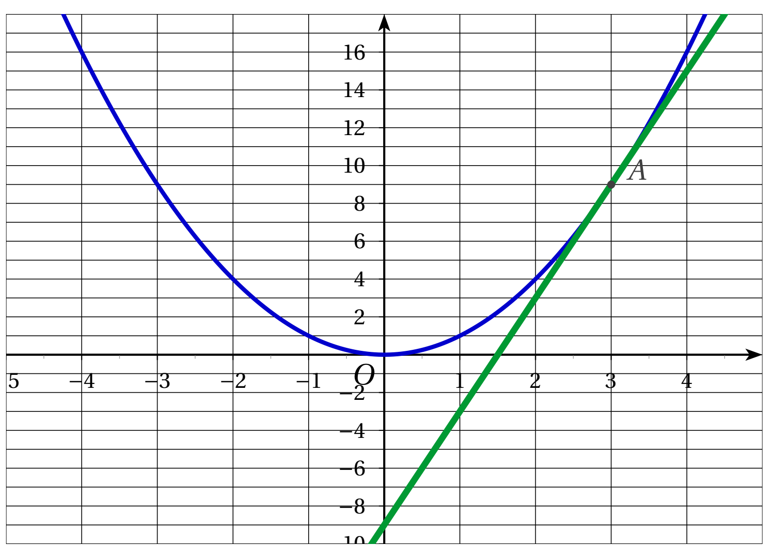
Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2$ et soit $A(a\,;\,f(a))$.
On peut conjecturer l'expression de $f'(a)$ en fonction de a à l'aide de Geogebra.
On remarque que $f'(a) = 2a$

IV.3 Pour les fonctions de référence :

Fonction f définie par :	Nombre dérivé de f en a ; $f'(a)$
$mx+p$	$f'(a) = m$(constante)
$f(x) = x^2$	$f'(a) = 2a$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(a) = 2a + b$
$f(x) = \dfrac{1}{x},\ x \neq 0$	$f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$
$f(x) = x^3$	$f'(a) = 3a^2$
$f(x) = \sqrt{x},\ x > 0$	$f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

Exemples :

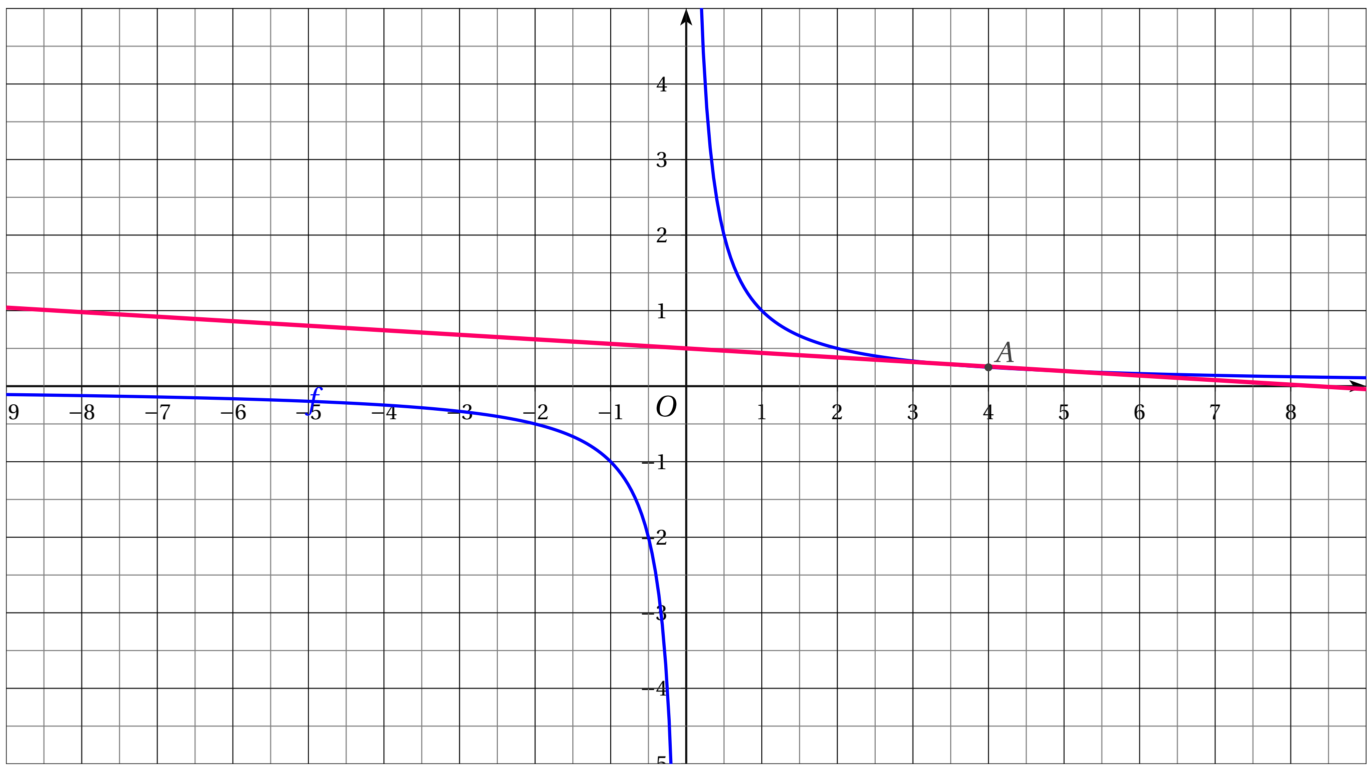
1. Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2$. Trouver l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en 3 :
   Pour tout a, on a : $f'(a) = 2a$ donc $f'(3) = 6$; $f(3) = 3^2 = 9$
   L'équation de la tangente en 3 est alors : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ donc $y = 6(x-3) + 9$, d'où : $\boxed{y = 6x - 9}$



2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Trouver l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en 4 :

   Pour tout a, on a : $f'(a) = -\dfrac{1}{a^2}$ donc $f'(4) = -\dfrac{1}{16}$; $f(4) = \dfrac{1}{4}$

   L'équation de la tangente en 4 est alors : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$ donc $y = -\dfrac{1}{16}(x-4)+\dfrac{1}{4}$, d'où : $\boxed{y = -\dfrac{1}{16}x + \dfrac{1}{2}}$.



Exercices n° 20 à 25 page 191

V Signe du nombre dérivé

V.1 Conjecture avec la fonction carré

On constate que pour $a < 0$, $f'(a) < 0$, $f'(0) = 0$ et $f'(a) > 0$ pour $a > 0$

V.2 Conjecture avec une fonction quelconque

Exemple : si l'on reprend l'exemple vu au paragraphe II, on constate que $f'(a) < 0$ lorsque la fonction est décroissante et $f'(a) > 0$ lorsque la fonction f est croissante.

Propriété

Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I.

- Si f est strictement croissante sur I et si $a \in I$, alors $f'(a) > 0$.
- Si f est strictement décroissante sur I et si $a \in I$, alors $f'(a) < 0$.
- Si $a \in I$ et si $f'(a) = 0$, alors la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a est parallèle à l'axe des abscisses.

Exercices : Page 195 : n° 9, 14, 15, 18