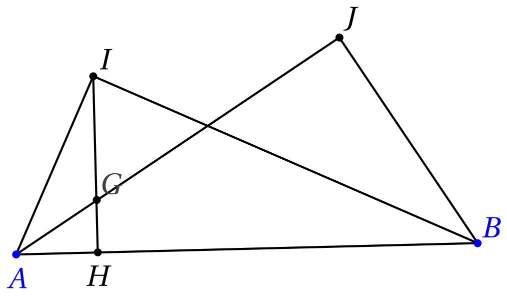
Produit scalaire : TD n° 4

I



Les triangles IAB et JAB sont rectangles en I et J et la hauteur issue de I dans le triangle IAB rencontre (AB) en H et (AJ) en K.
Justifier sans calcul, la suite d'égalités :
$AG \times AJ = \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AG}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AB}$
$= \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AI}^2 = AI^2$.

II

On donne $AB = 4$, $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 5$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{4}$. Calculer AC.

III

Le plan est muni d'un repère $\left(O; \vec{i}\ ; \vec{j}\right)$. On donne les points $A(2;-1)$, $B(-2;3)$ et $C(-1;-2)$.

1. Calculer les longueurs des côtés du triangle ABC.
2. Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.
3. En déduire les angles du triangle ABC. (On donnera les résultats en degrés à $0,01^\circ$près.)

IV Relation d'Euler

1. A, B et C sont trois points donnés. Démontrer que, pour tout point M,
$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AB} = 0.$$
2. En déduire que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

V

Soit un rectangle $ABCD$ de centre O et M un point quelconque du plan. Montrer l'égalité :
$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2.$$

VI

On considère la droite (d) d'équation 2x+3y-5=0. Donne un vecteur directeur $\vec{u}$ de (d) et un vecteur normal $\vec{n}$ de (d)

VII

Dans un repère $\left(O; \vec{i}\ ; \vec{j}\right)$, on donne les points $A(2;5)$ et $B(7;-2)$.

1. Donner une équation cartésienne de la droite (AB).
2. Soit $C(3;1)$. Donner l'équation de la droite (d') passant par C et perpendiculaire à la droite (AB).
3. Donner une équation cartésienne du cercle (C) de diamètre $[AB]$.
4. Trouver les coordonnées des points d'intersection, s'ils existent, du cercle (C) et de la droite (AB)