1S2 : Produit scalaire, trigonométrie : TD nº 6

I

Exprimer les expressions suivantes en fonction de $\sin x$ et $\cos x$:
$A(x) = \cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$

II

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \frac{1}{\cos(2x)}$
2. (a) Montrer que f est périodique de période π.
   (b) A-t-elle une autre propriété particulière ?
   (c) Sur quel intervalle suffit-il d'étudier f ?

III

Dans un repère orthonormal $\left(O ; \vec{i} ; \vec{j}\right)$, on considère le point $M(2\sqrt{3} ; 2)$.

1. Déterminer des coordonnées polaires de M dans $\left(O ; \vec{i}\right)$
2. On considère le point N tel que $ON = \frac{OM}{2}$ et $\left(\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{ON}\right) = \frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$.
   Déterminer des coordonnées polaires de N dans $\left(O ; \vec{i}\right)$.
3. (a) À partir de formules d'addition, montrer que $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
   (b) De même, calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.
4. En déduire les coordonnées cartésiennes de N.

IV

1. Résoudre dans $[0 ; 2\pi[$ les équations :
   (a) $\cos x = 0$
   (b) $1 - 2\sin x = 0$.
2. Résoudre dans $[0, 2\pi[$ les inéquations :
   (a) $\cos x > 0$
   (b) $1 - 2\sin x \geqslant 0$
3. On considère la fonction f définie par $f(x) = \cos^2 x + \sin x$.
   (a) Sur quel ensemble est-elle définie et dérivable ?
   (b) Sur quel ensemble suffit-il de l'étudier ? Justilier
   (c) Etudier les variations de f sur $[0 ; 2\pi[$
   (d) Dresser son tableau de variations complet (avec les valeurs des extremum) sur $[0 ; 2\pi]$.
   (e) Construire la courbe représentative de f sur $[0 ; 2\pi[$.
   (f) Montrer que, pour tout x, $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
   En déduire une conséquence graphique.
   (g) Compléter alors la courbe sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{5\pi}{2}\right]$

1S2 : Produit scalaire, trigonométrie : TD nº 6

I

Exprimer les expressions suivantes en fonction de $\sin x$ et $\cos x$:
$A(x) = \cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right)$

II

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \frac{1}{\cos(2x)}$
2. (a) Montrer que f est périodique de période π.
   (b) A-t-elle une autre propriété particulière ?
   (c) Sur quel intervalle suffit-il d'étudier f ?

III

Dans un repère orthonormal $\left(O ; \vec{i} ; \vec{j}\right)$, on considère le point $M(2\sqrt{3} ; 2)$.

1. Déterminer des coordonnées polaires de M dans $\left(O ; \vec{i}\right)$
2. On considère le point N tel que $ON = \frac{OM}{2}$ et $\left(\overrightarrow{OM} ; \overrightarrow{ON}\right) = \frac{3\pi}{4}\ (2\pi)$.
   Déterminer des coordonnées polaires de N dans $\left(O ; \vec{i}\right)$.
3. (a) À partir de formules d'addition, montrer que $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.
   (b) De même, calculer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.
4. En déduire les coordonnées cartésiennes de N.

IV

1. Résoudre dans $[0 ; 2\pi[$ les équations :
   (a) $\cos x = 0$
   (b) $1 - 2\sin x = 0$.
2. Résoudre dans $[0, 2\pi[$ les inéquations :
   (a) $\cos x > 0$
   (b) $1 - 2\sin x \geqslant 0$
3. On considère la fonction f définie par $f(x) = \cos^2 x + \sin x$.
   (a) Sur quel ensemble est-elle définie et dérivable ?
   (b) Sur quel ensemble suffit-il de l'étudier ? Justilier
   (c) Etudier les variations de f sur $[0 ; 2\pi[$
   (d) Dresser son tableau de variations complet (avec les valeurs des extremum) sur $[0 ; 2\pi]$.
   (e) Construire la courbe représentative de f sur $[0 ; 2\pi[$.
   (f) Montrer que, pour tout x, $f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
   En déduire une conséquence graphique.
   (g) Compléter alors la courbe sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{5\pi}{2}\right]$