Dérivation d'une fonction :

I Introduction

I.1 Chute d'un corps

On lâche un corps d'une hauteur de 30 m. La distance parcourue est donnée par la loi horaire $d(t) = 5t^2$.

- Au bout de combien de temps l'objet a-t-il parcouru les 30 m ?
- Quelle est la vitesse moyenne de l'objet ?
- La vitesse moyenne n'est pas un bon indicateur ; au lâcher, la vitesse est nulle et la vitesse augmente. Il faut savoir calculer la vitesse instantanée de l'objet à chaque instant (comme la vitesse indiquée sur le tachymètre d'une voiture)

  On note $[AB]$ le trajet parcouru et $M(t)$ le point à l'instant t. On fixe un point $M(t_0)$ et on souhaiterait calculer la vitesse instantanée au point Mt_0.

  La vitesse moyenne entre le point $M(t_0)$ et le point $M(t)$ est $\dfrac{d(t_0+h)-d(t_0)}{h}$. Quand h diminue de plus en plus, la vitesse moyenne se rapproche de plus en plus de la vitesse instantanée cherchée ; la vitesse instantanée $v(t_0)$ est la limite quand h tend vers 0 de la vitesse moyenne $\dfrac{d(t_0+h)-d(t_0)}{h}$.

  On écrit : $v(t_0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{d(t_0+h)-d(t_0)}{h}$.

  À Montrouge, on estime que la distance d parcourue par un objet que l'on lâche, en négligeant la résistance de l'air, est : $d(t) = 4,9t^2$ (t est la durée de la chute).

  Alors : $\dfrac{d(t_0+h)-d(t_0)}{h} = \dfrac{4,9(t_0+h)^2-4,9t_0^2}{h} = \dfrac{4,9(t_0^2+2t_0h+h^2-t_0^2)}{h} = 4,9 \times \dfrac{2t_0h+h^2}{h} = 4,9\,(2t_0+h)$.

  Quand h tend vers 0, c'est-à-dire se rapproche de plus en plus de 0, le nombre $4,9\,(2t_0+h)$ se rapproche de plus en plus de $2t_0$.

  On écrit : $\boxed{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{d(t_0+h)-d(t_0)}{h} = 2t_0}$.

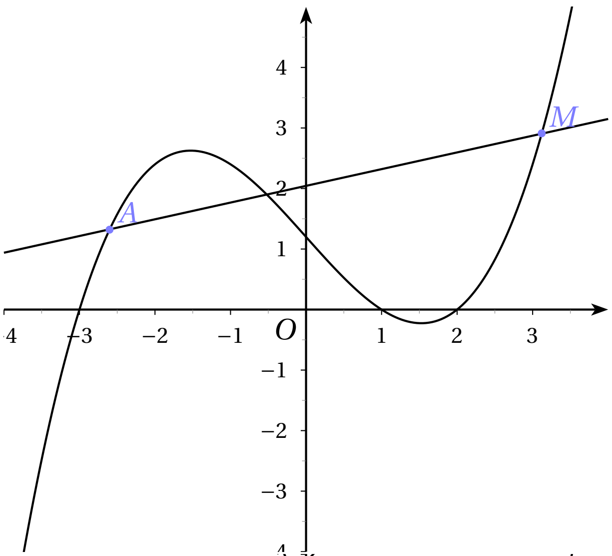
  On peut dire que la vitesse instantanée à l'instant t_0 est $2t_0$.

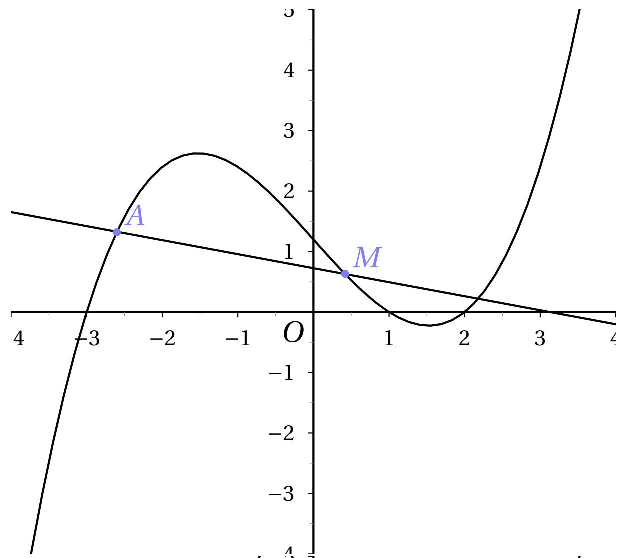
  Au bout de deux secondes de chute, l'objet a parcouru $4,9 \times 2^2 = 19,6$ m et a une vitesse de $2 \times 4,9 = 9,8$ m/s.

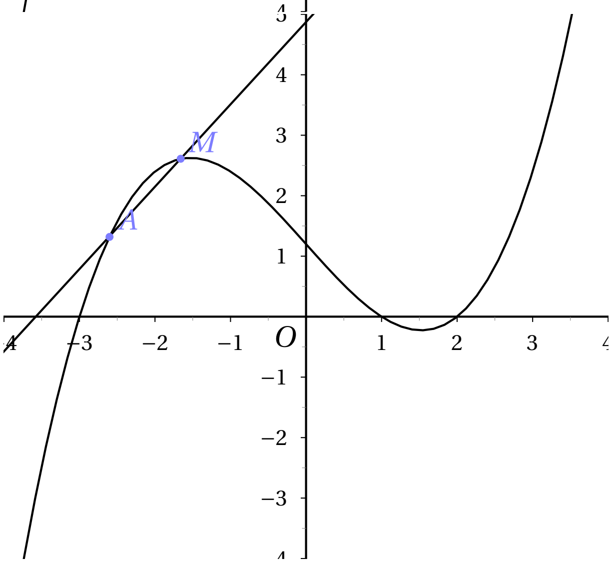
I.2 Tangente à une courbe

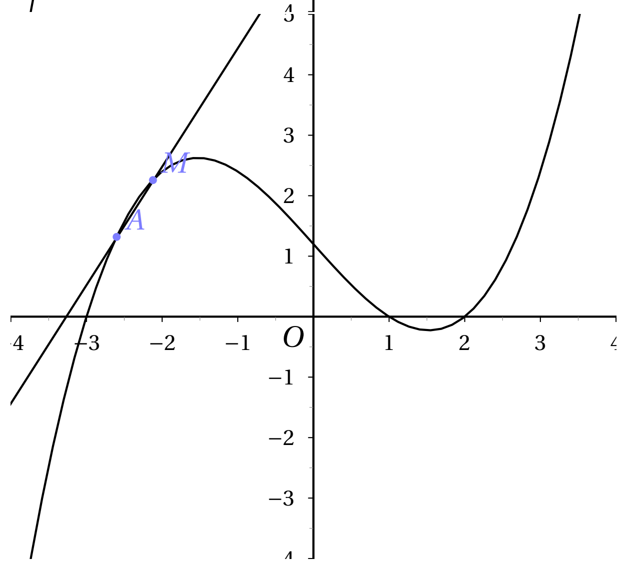
Soit f une fonction et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $\left(O\,;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\right)$.
Soit $A(a\,;\,f(a))$ un point fixe de $\mathscr{C}_f$ et $M(a+h\,;\,f(a+h))$ un point variable de cette courbe. On trace la droite (AM). Elle coupe la courbe $\mathscr{C}_f$ en au moins deux points distincts : A et M (et éventuellement d'autres points). On dit que (AM) est une sécante à la courbe.
Que se passe-t-il quand M se rapproche de plus en plus de A ? La sécante se rapproche de plus en plus d'une position limite qui est une droite, qui coupe la courbe localement en un seul point : A. On dit que c'est la tangente à la courbe en A.

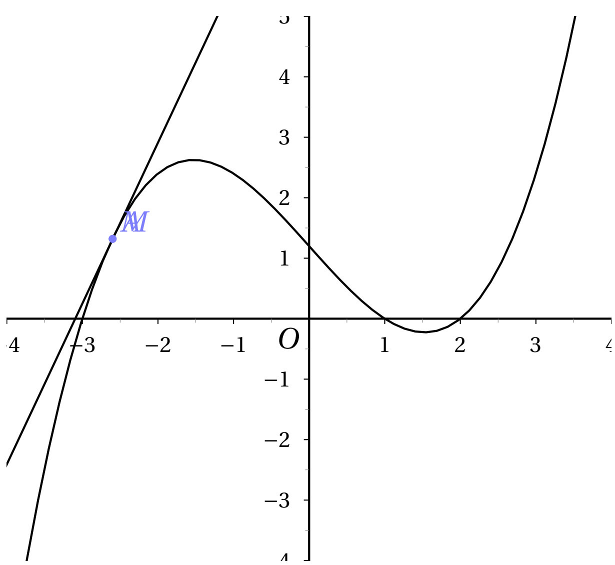
On considère une courbe, un point A fixe, un point M variable et la droite (AM).
Quand $A \neq M$, la droite (AM) est sécante à la courbe en au moins deux points, A et M.
Sont représentées différentes situations quand M se rapproche de A, jusqu'à ce que M vienne se superposer à A la droite (AM) ne coupe alors plus la courbe localement qu'un un point, A : on dit que la droite est tangente à la courbe en A.











Quand le point M vient sur se positionner sur A, la droite (AM) a une « position limite » , qui est la tangente à la courbe en A ; localement, cette tangente ne coupe la courbe qu'en un seul point.
Pour voir l'animation avec le point M variable, cliquer ici.

II Notion de limite d'une fonction en un réel a :

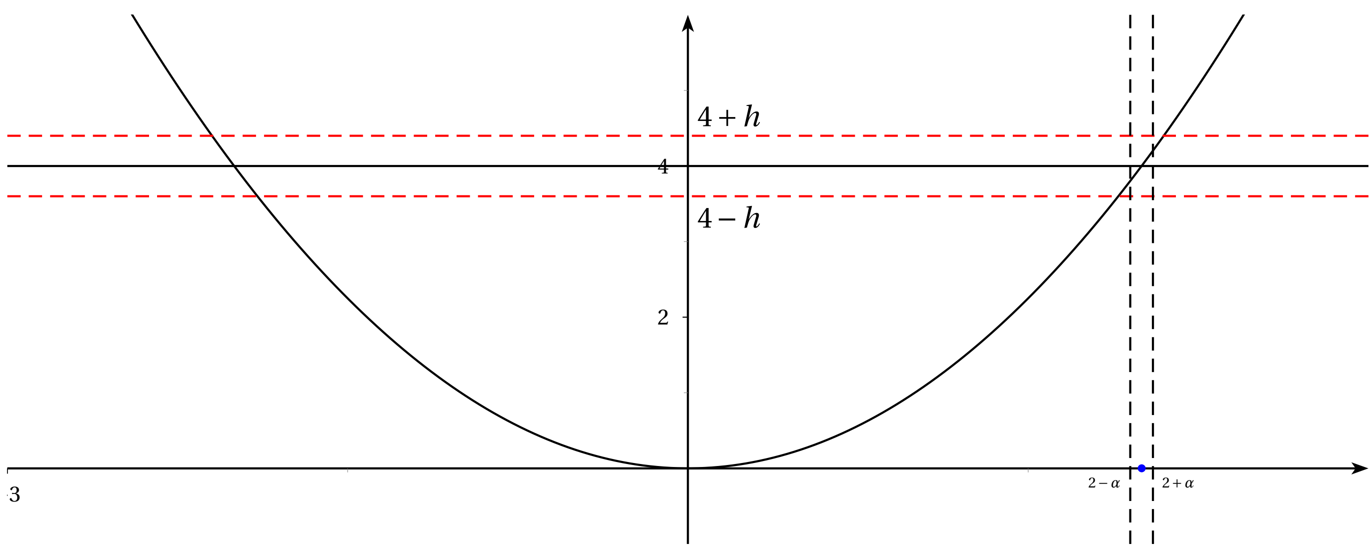
II.1 Définition :

Définition

Soit f une fonction, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$; soit a un réel appartenant à l'ensemble de définition de f.
Le réel ℓ est **limite de** f en a quand $f(x)$ peut être rendu aussi proche que l'on veut de ℓ dès que x est suffisamment proche de a.
Plus précisément, pour tout intervalle $]\ell - h\ ;\ \ell + h[$, il existe $\alpha > 0$ tel que, si $x \in]a - \alpha\ ;\ a + \alpha[$, $f(x) \in]\ell - h\ ;\ \ell + h[$.
Autrement dit : pour tout $h > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si $|x - a| < \alpha$, alors $|f(x) - \ell| < h$.
On écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$

II.2 Exemple graphiques

Exemple : $f(x) = x^2$; étudions la limite en 2.



On a : $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$

II.3 Théorème important

Théorème (admis)

Pour toute fonction polynôme, pour toute fraction rationnelle, pour la fonction racine carrée, pour la fonction cos ou la fonction sin, on a :

$$\text{Pour tout } a \in \mathscr{D}_f,\ \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

.

III Nombre dérivé d'une fonction en un réel a

III.1 Notation et vocabulaire

Dans la suite du chapitre, f est une fonction définie sur un intervalle ouvert D_f contenant a et $\mathscr{C}_f$ est la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

Définition :

Soit A le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a et M un point variable, d'abscisse $a+h$.

Le coefficient directeur de la droite sécante (AM) vaut : $\tau(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$. On l'appelle aussi taux d'accroissement de f en a.

f est dérivable en a lorsque, pour tout $h \neq 0$, le nombre $\tau(h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie ℓ quand h tend vers 0.
ℓ est appelé **nombre dérivé de f en a** ; on le note $f'(a)$.
On écrit alors : $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ ou $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

$f'(a)$ est alors le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a.

III.2 Exemples :

Exemple 1 : Soit la fonction carré : $f : x \mapsto x^2$, définie sur $\mathbb{R}$.

- Regardons ce qui se passe en 3 :
  Pour tout $h \neq 0$, $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \dfrac{(3+h)^2-3^2}{h} = \dfrac{9+6h+h^2-9}{h} = \dfrac{h(6+h)}{h} = 6+h$ donc $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$
  6.
  f est dérivable en 3 et $f'(3) = 6$.
- Soit a un réel.
  Pour tout $h \neq 0$, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{(a+h)^2-a^2}{h} = \dfrac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \dfrac{2ah+h^2}{h} = \dfrac{h(2a+h)}{h} = 2a+h$.
  Quand h tend vers 0, $2a+h$ tend vers 2a.
  Par conséquent, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite quand h tend vers 0 : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = 2a$: la fonction f est dérivable en a et $f'(a) = 2a$.

Exemple 2 : Soit f la fonction inverse : $f(x)=\dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

Soit $a\neq 0$.

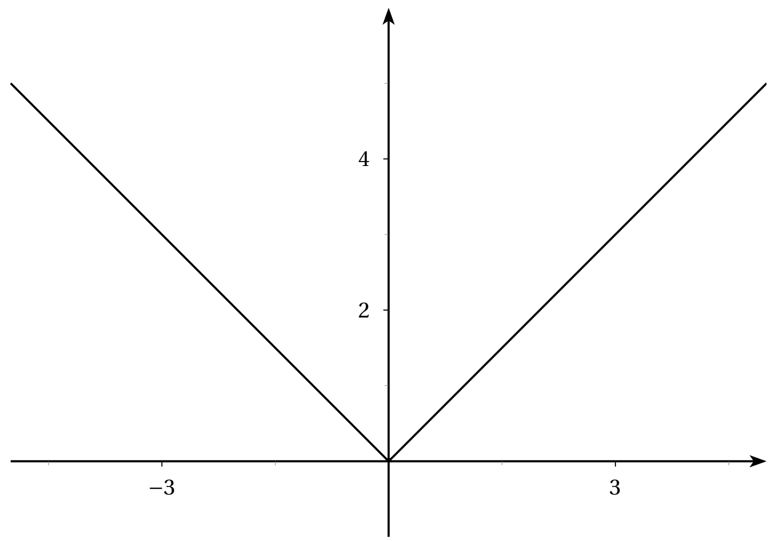
Pour tout $h\neq 0$, $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\dfrac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h}=\dfrac{-\frac{h}{a(a+h)}}{h}=-\dfrac{1}{a(a+h)}$.

$\lim\limits_{h\to 0}(a+h)=a$ donc $\lim\limits_{h\to 0}[a(a+h)]=a^2$.

Par conséquent : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=-\dfrac{1}{a^2}$.

On en déduit que f est dérivable en tout $a\neq 0$ et $f'(a)=-\dfrac{1}{a^2}$

Soit f la fonction valeur absolue : $f(x)=|x|$.



On voit graphiquement que l'on a deux cas possibles.

- Soit $a\neq 0$; la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a existe et est confondue avec la courbe ; f est dérivable en a.
- En 0 : Soit M un point variable de la courbe C ; la sécante (OM) est une droite fixe, confondue avec la courbe, mais **différente** selon que le point M l'abscisse de M est strictement négative ou positive.
  Quand M se rapproche de plus en plus de O, la situation ne change pas ; il n' y a donc pas de position limite pour la droite (OM) puisque ce n'est pas la même droite selon le signe de l'abscisse de M.
  De façon calculatoire :
  Si $a<0$; pour h suffisamment petit, $a+h<0$ donc $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{|a+h|-|a|}{h}=\dfrac{-(a+h)-(-a)}{h}=\dfrac{-h}{h}=-1$
  donc $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(-1)=-1$.
  $\boxed{f'(a)=-1}$.

  Si $a>0$; pour h suffisamment petit, $a+h>0$ donc $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{|a+h|-|a|}{h}=\dfrac{(a+h)-(a)}{h}=\dfrac{h}{h}=1$ donc
  $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}(1)=-1$.
  $f'(a)=-1$.

  En 0 : $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=\dfrac{|0+h|-|0|}{h}=\dfrac{|h|}{h}=\begin{cases}\dfrac{-h}{h}=-1 \text{ si } h<0\\ \dfrac{h}{h}=1 \text{ si } h>0\end{cases}$.

On en déduit que l'expression n'a pas de limite lorsque h tend vers 0 donc la courbe n'as pas de tangente en 0.

Remarque :

Cependant, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = -1$ donc la courbe a une **demi-tangente** à gauche en 0.

De même, $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = 1$ donc la courbe a une **demi-tangente** à droite en 0.

Remarque

On ne refait pas les calculs à chaque fois !
Nous verrons dans un paragraphe ultérieur les formules de dérivation pour les fonctions usuelles et on les applique directement.

III.3 Équation de la tangente :

Théorème

L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ en a est : $\boxed{y = f'(a)(x-a)+f(a)}$.

Démonstration : le coefficient directeur est $f'(a)$ donc l'équation réduite est de la forme $y = f'(a)x + p$.
Elle passe par le point de coordonnées $(a\ ;\ f(a))$ donc $f(a) = f'(a)a + p$.
Par soustraction, on obtient : $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ d'où $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.

IV Fonction dérivée

Définition

Soit I un intervalle inclus dans $\mathscr{D}_f$.
On dit que la fonction f est dérivable sur I lorsqu'elle est dérivable en tout a de I
Si f est dérivable sur I, on appelle fonction dérivée de f la fonction, notée f', définie sur I par :

$$f' : x \mapsto f'(x).$$

Remarque

f' associe à chaque valeur de x le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisses x.

IV.1 Dérivées des fonctions usuelles

à apprendre par cœur !

Fonction f	définie sur	Fonction dérivée f'
$f(x) = k$ (constante)	définie sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x$	définie sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$ fonction affine	définie sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = a$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$	définie sur $\mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N} (n > 1)$	$f'(x) = nx^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$	définie sur $[0\ ;\ +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ sur $]0\ ;\ +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	définie sur $\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$
$f(x) = \dfrac{1}{x^n}$	définie sur $\mathbb{R}^*$; $n \in \mathbb{N}$; $n \geqslant 1$	$f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$ sur $\mathbb{R}^*$
$f(x) = \cos(x)$	définie sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$ (sur $\mathbb{R}$)
$f(x) = \sin(x)$	définie sur $\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$ (sur $\mathbb{R}$)

Exemples :

- $f(x) = 3$; $f'(x) = 0$
- $f(x) = x^5$; $f(x) = x^n$ avec $n = 5$.
  Alors : $f'(x) = nx^{n-1} = 5x^4$
- $f(x) = \dfrac{1}{x^7}$; $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$ avec $n = 7$.
  Alors : $f'(x) = -\dfrac{1}{x^{n+1}} = -\dfrac{1}{x^{7+1}} = -\dfrac{1}{x^8}$

IV.2 Opérations algébriques sur les fonctions dérivées :

Théorème

u et v sont des fonctions dérivables sur un même intervalle I. Alors :

1. $u + v$ est dérivable sur I et : $(u + v)' = u' + v'$
   Pour tout $x \in I$, $(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$.
2. Pour k réel, ku est dérivable et : $(ku)' = ku'$
   Pour tout $x \in I$, $(ku)'(x) = ku'(x)$.
3. uv est dérivable et $(uv)' = u'v + uv'$
   Pour tout $x \in I$, $(uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
4. Si v ne s'annule pas sur I, $\left(\dfrac{1}{v}\right)$ est dérivable ; $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$
   Pour tout $x \in I$, $\left(\dfrac{1}{v}\right)'(x) = -\dfrac{v'(x)}{v^2(x)}$
5. Si v ne s'annule pas sur I, $\dfrac{u}{v}$ est dérivable et : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
   Pour tout $x \in I$, $\left(\dfrac{u}{v}\right)'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$

Démonstrations :

1. Soit a un réel fixé dans I. u et v sont dérivables en a.
   Il faut étudier la limite quand h tend vers 0 de la quantité : $\dfrac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h}$.
   $\dfrac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = \dfrac{u(a+h)+v(a+h)-u(a)-v(a)}{h} = \dfrac{u(a+h)-u(a)}{h} + \dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}$.
   La première fraction tend vers $u'(a)$ et la seconde vers $v'(a)$ donc par somme :
   $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(u+v)(a+h)-(u+v)(a)}{h} = u'(a)+v'(a)$.
2. facile : $\dfrac{(ku)(a+h)-(ku)(a)}{h} = \dfrac{k\times u(a+h)-k\times u(a)}{h} = k\times \dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}$.
   Comme u est dérivable en a, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$.
   Par conséquent : $\lim\limits_{h\to 0} \left(k\times \dfrac{u(a)+h}{-} u(a)h\right) = ku'(a)$ donc $(ku)' = ku'$.
3. Il s'agit d'étudier $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h}$.
   On utilise une **astuce de calcul** :
   $(uv)(a+h)-(uv)(a) = u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a) = u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a+h)+u(a)v(a+h)+u(a)v(a)$.
   On en déduit : $\dfrac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = \dfrac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a+h)+u(a)v(a+h)+u(a)v(a)}{h}$
   $= \dfrac{[u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a+h)]+[u(a)v(a+h)+u(a)v(a)]}{h}$
   $= \dfrac{[u(a+h)-u(a)]v(a+h)+u(a)[v(a+h)-v(a)]}{h}$
   $= \dfrac{u(a+h)-u(a)}{h}\times v(a+h)+u(a)\times \dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}$.

   v est dérivable en a donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$. Cela s'écrit aussi : $\lim\limits_{h\to 0} \left[\dfrac{v(a)+h}{-} v(a)h - v'(a)\right] = 0$.
   En posant $\varphi(h) = \dfrac{v(a)+h}{-} v(a)h - v'(a)$, on a $\lim\limits_{h\to 0} \varphi(h) = 0$ et $v(a+h)-v(a) = v'(a)h + h\varphi(h)$,
   d'où : $v(a+h) = v(a)+v'(a)h+h\varphi(h)$ avec $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h) = 0$ d'où $\boxed{\lim\limits_{h\to 0} v(a+h) = v(a)}$.

   Puisque u est dérivable en a, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$.

   Puisque v est dérivable en a, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$.

   D'où : $\boxed{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = u'(a)v(a)+u(a)v'(a)}$
4. Montrons que $\dfrac{1}{v}$ est dérivable en a :
   $\dfrac{\left(\frac{1}{v}\right)(a+h)-\left(\frac{1}{v}\right)(a)}{h} = \dfrac{\frac{1}{v(a+h)}-\frac{1}{v(a)}}{h} = \dfrac{\frac{v(a)-v(a+h)}{v(a)v(a+h)}}{h} = \dfrac{v(a)-v(a+h)}{hv(a)v(a+h)} = -\dfrac{1}{v(a)v(a+h)}\times\dfrac{v(a+h)-v(a)}{h}$
   d'où : $\boxed{\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\left(\frac{1}{v}\right)(a+h)-\left(\frac{1}{v}\right)(a)}{h} = -\dfrac{v'(a)}{v^2(a)}}$
5. Pour montrer que $\dfrac{u}{v}$ est dérivable, on écrit $\dfrac{u}{v} = u\times\dfrac{1}{v}$; on a vu que $\dfrac{1}{v}$ était dérivable et que le produit de

deux fonctions dérivables l'est également.
On utilise alors la formule donnant la dérivée du produit.

Exemples :

- $f(x) = 5x^3$; $f = ku$ avec $k = 5$ et $u(x) = x^3$.
  Alors : $f' = (ku)' = ku'$ avec $u'(x) = 3x^2$ d'où : $f'(x) = 5 \times 3x^2 = \boxed{15x^2}$.
- $f(x) = 3x^2 + 5x$.
  $f = u + v$ avec $u(x) = 3x^2$ et $v(x) = 5x$.
  $f' = (u+v)' = u' + v'$ avec $u'(x) = 3 \times 2x = 6x$ et $v'(x)5$.
  Par conséquent : $\boxed{f'(x) = u'(x) + v'(x) = 6x + 5}$
- $f(x) = 5x^2\left(7x^2 + 5x + 1\right)$.
  $f = uv$ avec $u(x) = 5x^2$ et $v(x) = 7x^2 + 5x + 1$.
  On a alors : $f' = (uv)' = u'v + uv'$.
  $u(x) = 5 \times x^2$ donc $u'(x) = 5 \times 2x = 10x$
  v est une somme de fonctions, donc $v'(x) = 7 \times 2x + 5 \times 1 + 0 = 14x + 5$.
  Alors : $f'(x) = 10x \times \left(7x^2 + 5x + 1\right) + 5x^2 \times (14x + 5) = 70x^3 + 50x^2 + 10x + 70x^3 + 25x^2 = \boxed{140x^3 + 75x^2 + 10x}$
- $f(x) = (3x+5)\sqrt{x}$ sur $]0\,;\,+\infty[$
  $f = uv$ avec $\left\{\begin{array}{l} u(x) = 3x + 5 \\ v(x) = \sqrt{x} \end{array}\right.$
  $f' = (uv)' = u'v + uv'$ avec $\left\{\begin{array}{l} u'(x) = 3 \\ v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{array}\right.$
  $f'(x) = 3\sqrt{x} + (3x+5) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{3\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + (3x+5)}{2\sqrt{x}} = \boxed{\dfrac{9x+5}{2\sqrt{x}}}$
- $f(x) = \dfrac{7x+5}{2x+3}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$.
  $f = \dfrac{u}{v}$ avec $\left\{\begin{array}{l} u(x) = 7x + 5 \\ v(x) = 2x + 3 \end{array}\right.$.
  $f' = \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $\left\{\begin{array}{l} u'(x) = 7 \\ v'(x) = 2 \end{array}\right.$.
  $f'(x) = \dfrac{7(2x+3) - 2(7x+5)}{(2x+3)^2} = \boxed{\dfrac{11}{(2x+3)^2}}$