Calcul vectoriel, barycentres

Plan :

I Calcul vectoriel dans l'espace

1 Comme dans le plan

Définition :

Un vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace est défini par sa direction, son sens et sa norme ; il caractérise une translation. Étant donnés un vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace et un point A, il existe un unique point B de l'espace tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.

Égalité vectorielle

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si, et seulement si, le quadrilatère $ABDC$ est un parallélogramme de l'espace.

Remarque :

On a aussi une « version soustractive » de la relation de Chasles :

Pour tous points A, B et C, on a : $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

Règle du parallélogramme : Pour trois points de l'espace, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ où D est le quatrième sommet du parallélogramme $ABCD$.

Définitions :

Le vecteur nul, noté $\overrightarrow{O}$, correspond à la tranlation « Identité », qui laisse invariants tous les points.
Par analogie avec les nombres, on note $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ (car la relation de Chasles donne $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{0}$)

Relation de Chasles :

Soient trois points de l'espace : on définit une addition sur les vecteurs par la relation : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Multiplication d'un vecteur par un réel :

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et soit k un réel. Le vecteur $k\overrightarrow{u}$ a la même direction que $\overrightarrow{u}$, même sens si $k > 0$ et un sens contraire si $k < 0$ et une norme égale à $|k| \times ||\overrightarrow{u}||$. ($||k\overrightarrow{u}|| = |k|.||\overrightarrow{u}||$)

Propriétés algébriques :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques de l'espace et k et k' deux réels quelconques, on a : • $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u}+k\vec{v}$; • $(k+k')\vec{u} = k\vec{u}+k'\vec{u}$; • $(k \times k')\vec{u} = k(k'\vec{u})$: • $k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow k=0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

Coordonnées d'un point et d'un vecteur :

On définit un repère dans l'espace en prenant trois axes sécants en O et tels que qu'aucun des axes n'est dans le plan formé par les deux autres.
Le plus facile est de les prendre orthogonaux.
Sur chacun des axes, on définit une unité par les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$.
Pour tout point M de l'espace, il existe trois nombres uniques x_M, y_M et z_M tels que $\overrightarrow{OM} = x_M\vec{i} + y_M\vec{j} + z_M\vec{k}$.
Ces trois nombres sont appelés coordonnées du point M dans le repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$. On écrit : $M(x_M\,;\,y_M\,;\,z_M)$.

Soient deux points $A(x_A\,;\,y_A\,;\,z_A)$ et $B(x_B\,;\,y_B\,;\,z_B)$. Alors, les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont :
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.
Cela vient de ce que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.
Dans le plan, on a que deux coordonnées.

Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si, et seulement si, ils ont même direction.
Cela s'écrit aussi : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Vecteur directeur d'une droite

Une droite $\mathscr{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{u}$ non nul si $\vec{u}$ et $\mathscr{D}$ ont même direction.

2 Uniquement dans l'espace :

Vecteurs coplanaires :

Définition :

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si les points A, B, C et D tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ sont coplanaires (c'est-à-dire dans un même plan).

Propriété :

Trois vecteurs de l'espace sont coplanaires si l'un d'entre eux s'exprime en fonction des deux autres : $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ou il existe deux réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

3 Exercices

Exercice 1 $ABCD$ et $ABEF$ sont deux parallélogrammes. Démontrer que $CDFG$ est un parallélogramme.

Exercice 2 $ABCD$ est un quadrilatère quelconque dont les diagonales se coupent en O. Les points I, J, K et L sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$.

1) a) Faire une figure.

b) Démontrer que $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{IJ}$.
En déduire la nature du quadrilatère $IJKL$.

2) i. Construire les points I', J', K' et L' tels que :
- $\overrightarrow{OI'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.
- $\overrightarrow{OJ'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$.
- $\overrightarrow{OK'} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$.
- $\overrightarrow{OL'} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA}$.

ii. Quelle est la nature du quadrilatère $I'J'K'L'$?

Exercice 3 On considère un triangle ABC et les points I et J tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$.
Démontrer que $\overrightarrow{BJ} = 3\overrightarrow{IC}$.
Que peut-on en déduire pour les droites (BJ) et (IC) ?

Exercice 4 Soit $ABCD$ un quadrilatère. Placer les points M et N tels que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AD}$.

(a) Montrer que ; $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$.

(b) On suppose maintenant que $ABCD$ est un parallélogramme. Montrer que $\overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{CM}$.
Qu'en déduit-on pour les points M, N et C ?

II Barycentres

1 Point pondéré

Définition :

- On appelle point pondéré tout couple $(A\,;\,\alpha)$ où A est un point de l'espace et α un nombre réel.
- Soit n un entier naturel avec $n \geqslant 2$. L'ensemble $S = \{(A_1\,;\,\alpha_1)\,;\,\cdots(A_n\,;\,\alpha_n)\}$ est appelé système de n points pondérés.
- On appelle masse du système S le nombre $m = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.

2 Barycentre de deux points

Soit $S = \{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\}$ un système de deux points pondérés.

Théorème et définition :

- Si $m = \alpha + \beta = 0$, pour tout point G, la somme vectorielle $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB}$ est égale à un vecteur constant.
- Si $m = \alpha + \beta \neq 0$, il existe un unique point G tel que $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$.
G est appelé le barycentre du système $S = \{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\}$; $m = \alpha + \beta$ est la masse du barycentre G.

Démonstration :

- On suppose que $\alpha+\beta=0$; alors, pour tout point G, $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)=(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}=0.\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}=\boxed{\beta\overrightarrow{AB}}$. (vecteur constant)

- $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow(\alpha+\beta)\overrightarrow{GA}=-\beta\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\boxed{\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}}$.

  Cette égalité détermine G de manière unique et donne son existence.

Propriété :

Soit un système $S=\{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\}$ de barycentre G (donc $\alpha+\beta\neq 0$).

1. **Commutativité :** G est aussi le barycentre du système $\{(B\,;\,\beta)\,;\,(A\,;\,\alpha)\}$.
2. **Homogénéité :** Pour tout réel $k\neq 0$, $G=\text{Bar}\{(A\,;\,k\alpha)\,;\,(B\,;\,k\beta)\}$

Démonstration :

1. G est le barycentre de $\{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\}$ donc $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\beta\overrightarrow{GB}+\alpha\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{0}$ donc G est le barycentre de $\{(B\,;\,\beta)\,;\,(A\,;\,\alpha)\}$.
2. k étant non nul, on a : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow k\times\alpha\overrightarrow{GA}+k\times\beta\overrightarrow{GB}=k\times\overrightarrow{0}\Leftrightarrow(k\alpha)\overrightarrow{GA}+(k\beta)\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}$ et donc, G est le barycentre du système $\{(A\,;\,k\alpha)\,;\,(B\,;\,k\beta)\}$.

Théorème :

Soit G le barycentre d'un système $S=\{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\}$.
Alors : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BG}=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$.
On en déduit que G appartient à la droite (AB)

Ces deux formules équivalentes permettent de trouver la position de G.

Démonstration :

On a déjà vu la première partie (basée sur la relation de Chasles). La deuxième partie se démontre de manière analogue.

Définition :

Si $\alpha=\beta(\neq 0)$, le barycentre du système $\{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\}$ est appelé **isobarycentre** de $\{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\}$.

D'après la propriété d'homogénéité, c'est aussi l' isobarycentre de $\{(A\,;\,1)\,;\,(B\,;\,1)\}$.
On a alors : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc l'isobarycentre de $\{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\}$ est le milieu du segment $[AB]$.

3 Propriété (fondamentale)

Soit $\{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\}$ un système de points pondérés avec $\alpha+\beta\neq 0$ et soit G le barycentre de ce système.
Alors, pour tout point M, on a : $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$

Démonstration :

On utilise la relation de Chasles :
$\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}=\alpha\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GA}\right)+\beta\left(\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{GB}\right)=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}+\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}$ car, par définition du barycentre G, $(\alpha+\beta)\overrightarrow{MG}=\overrightarrow{0}$.
Cette propriété fondamentale permet de retrouver toutes les formules !

Utilisation : (il suffit de choisir le point M adéquat)

1. En prenant $M=A$, on trouve : $\beta\overrightarrow{AB}=(\alpha+\beta)\overrightarrow{AG}$ d'où $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}$

2. En prenant : $M = B$: on retrouve $\overrightarrow{BG} = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\overrightarrow{BA}$
3. En prenant $M = G$, on retrouve : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$
4. En prenant $M = O$, origine d'un repère : on obtient : $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{\alpha+\beta}\left(\alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}\right)$.
   On en déduit les relations sur les coordonnées ;
   $x_G = \dfrac{\alpha x_A + \beta x_B}{\alpha+\beta}$; $y_G = \dfrac{\alpha y_A + \beta y_B}{\alpha+\beta}$; $z_G = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B}{\alpha+\beta}$
   En effet : $\overrightarrow{OA} = x_A\overrightarrow{i} + y_A\overrightarrow{j} + z_A\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{OB} = x_B\overrightarrow{i} + y_B\overrightarrow{j} + z_B\overrightarrow{k}$.

III Barycentre de trois points

Théorème et définition :

Soit $S = \{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\,;\,(C\,;\,\gamma)\}$ un système de trois points pondérés.

- Si $m = \alpha+\beta+\gamma = 0$, pour tout point G, la somme $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC}$ est un vecteur constant.
- Si $m = \alpha+\beta+\gamma \neq 0$, il existe un unique point G tel que : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

Démonstration :

- On suppose $m = \alpha+\beta+\gamma = 0$; alors, pour tout G, $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\right) + \gamma\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}\right) = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$ qui est un vecteur constant.
- On suppose $m = \alpha+\beta+\gamma \neq 0$.
  Alors : $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB} + \dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$, ce qui définit G de manière unique.

Les propriétés de commutativité et d'homogénéité sont conservées.

Propriété fondamentale

On suppose $m = \alpha+\beta+\gamma \neq 0$.
Alors, pour tout M, $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$.
Remarque : cela revient à concentrer toute la masse sur G.

Démonstration : on utilise la relation de Chasles.
Pour tout M, $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \alpha\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right) + \beta\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right) + \gamma\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}\right) = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG} + \alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = (\alpha+\beta+\gamma)\overrightarrow{MG}$ car $\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ (par définition de G).

Théorème d'associativité

Soit $S = \{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\,;\,(C\,;\,\gamma)\}$ un système de trois points pondérés, de masse non nulle et de barycentre G.
Si $\alpha+\beta \neq 0$ et si K est le barycentre du système $\{(A\,;\,\alpha)\,;\,(B\,;\,\beta)\}$, alors G est le barycentre de $\{(K\,;\,\alpha+\beta)\,;\,(C\,;\,\gamma)\}$

Démonstration :
$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow (\alpha+\beta)\overrightarrow{GK} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ donc G est le barycentre de $\{(K\,;\,\alpha+\beta)\,;\,(C\,;\,\gamma)\}$.

Exemple : trouvons l'isobarycentre d'un triangle (centre de gravité).
Notons I le milieu de $[BC]$; alors G est le barycentre de $\{(I\,;\,2)\,;\,(A\,;\,1)$. On en déduit $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$.
On retrouve que G est sur la médiane $[AI]$ et aux deux tiers de celle-ci en partant du sommet.