Correction du contrôle

I

Rappel : Si $\vec{n}\,(a\,;\,b)$ est un vecteur normal à la droite $\mathscr{D}$ et que celle-ci passe par le point $A\left(x_A\,;\,y_A\right)$, une équation cartésienne de $\mathscr{D}$ est : $a\left(x-x_A\right)+b\left(y-y_A\right)=0$.
Ici : $A(1\,;\,-2)$ et $\vec{n}\,(1\,;\,3,)$.
Une équation de la droite ayant $\vec{n}$ comme vecteur normal et passant par A est :
$1(x-1)+3(x-(-2))=0 \Leftrightarrow \boxed{x+3y+5=0}$.

II

Soit $\Omega(1\,;\,3)$ et soit $r=2$.
Une équation cartésienne du cercle de centre Ω et de rayon r est :
$(x-1)^2+(y-3)^2=2^2$, soit : $\boxed{(x-1)^2+(y-3)^2=4}$.

III

On considère l'équation $x^2+y^2-6x+8y+16=0$.
$x^2+y^2-6x+8y+16=0 \Leftrightarrow x^2-6x+y^2+8y+16=0$
$\Leftrightarrow (x-3)^2-3^2+(y+4)^2-4^2+16=0 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2=9$
$\Leftrightarrow \boxed{(x-3)^2+(y+4)^2=3^2}$.
C'est bien l'équation du cercle de centre $\Omega(3\,;\,-4)$ et de rayon 3.

IV

1. La mesure principale d'un angle est, parmi toutes les mesures de cet angle définies à un nombre entier de fois 2π près, celle qui appartient à l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.
2. On cherche la mesure principale de $\dfrac{185\pi}{6}$.
   Ce nombre dépasse π. il faut retrancher $2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, pour tomber dans l'intervalle $]-\pi\,;\,\pi]$.
   On doit donc avoir :
   $-\pi<\dfrac{185\pi}{6}-2k\pi\leqslant\pi \Leftrightarrow -1<\dfrac{185}{6}-2k\leqslant 1$
   $\Leftrightarrow -6<185-12k<6 \Leftrightarrow -191\leqslant -12k\leqslant -179$
   $\Leftrightarrow \dfrac{191}{12}>k\geqslant\dfrac{179}{12}$.
   On en déduit : $\boxed{k=15}$.
   La mesure principale correspondant à un angle de $\dfrac{185\pi}{6}$ est : $\dfrac{185\pi}{6}-15\times 2\pi=\dfrac{185\pi}{6}-\dfrac{180\pi}{6}=\boxed{\dfrac{5\pi}{6}}$.

V

Soient les points $A(1\,;\,2)$, $B(-1\,;\,4)$ et $C(2\,;\,-3)$

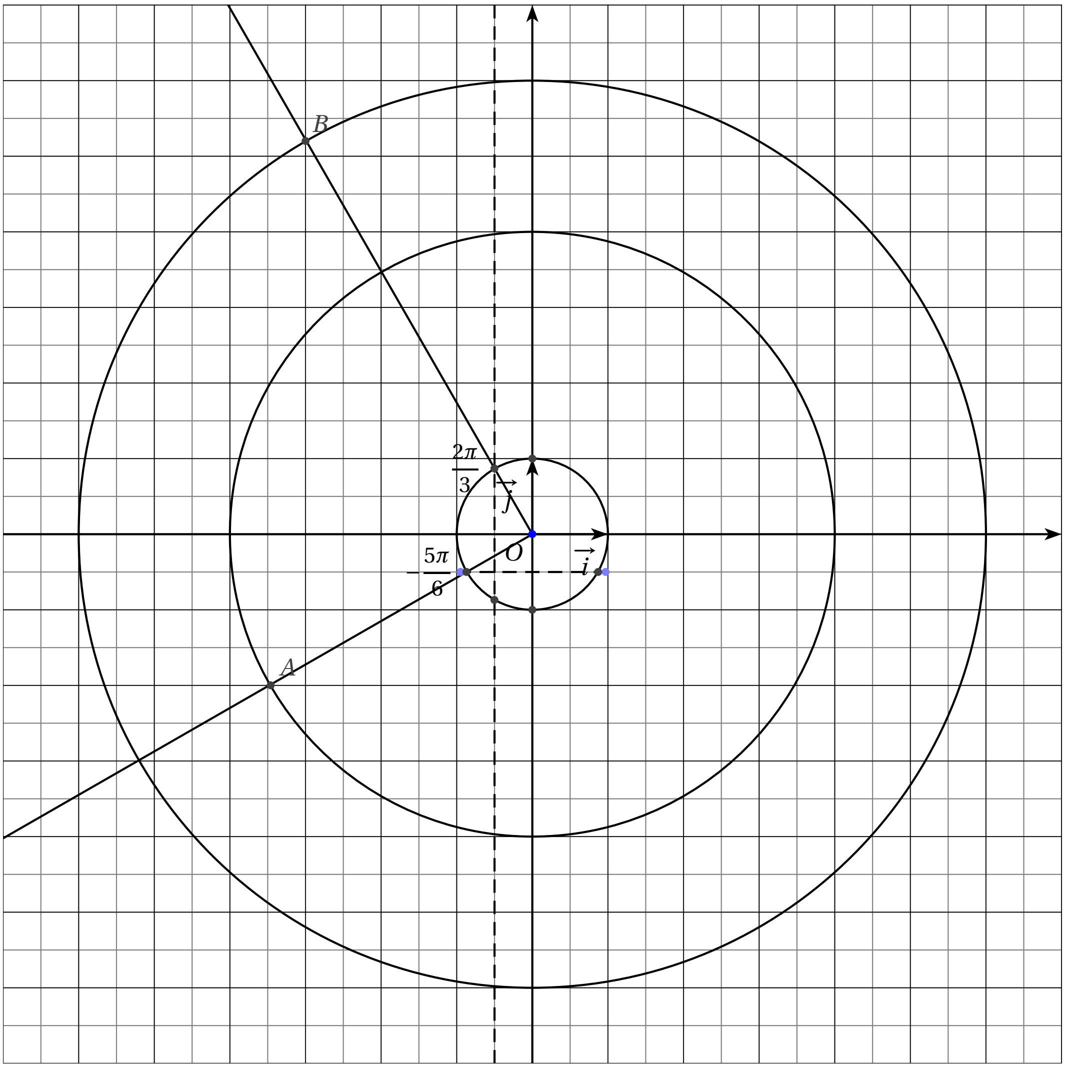
1. Les coordonnes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont : $\overrightarrow{AB}(-2\,;\,2)$ et $\overrightarrow{AC}(2\,;\,-3)$.
2. On en déduit :
   - $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-2\times2+2\times(-3)=-4-6=-10$; $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-10}$.
   - $AB=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$; $\boxed{AB=2\sqrt{2}}$.
   - $AC=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$; $\boxed{AC=\sqrt{13}}$.
3. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$ donc $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\dfrac{-10}{2\sqrt{2}\times 13}=-\dfrac{5}{\sqrt{26}}$.
   $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=-\dfrac{5}{\sqrt{26}}$; on en déduit que $\overrightarrow{BAC}\approx 168{,}7^\circ$ à $0{,}1^\circ$ par excès.

VI

On considère les points $A(-2\sqrt{3}\,;\,2)$et $B\left(-3\,;\,3\sqrt{3}\right)$.

1. Cherchons les coordonnées polaires de A :
   $r=OA=\sqrt{(-2\sqrt{3})^2+2^2}=\sqrt{12+4}=\sqrt{16}=4$.
   Si θ est la deuxième coordonnée polaire de A (angle entre $\vec{i}$ et $\overrightarrow{OA}$), on a : $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{x_A}{r}=\dfrac{-2\sqrt{3}}{4}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{y_A}{r}=\dfrac{-2}{4}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$.
   On cherche donc θ tel que : $\begin{cases}\cos\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$.
   On sait que $\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{1}{2}$ donc $\theta=\dfrac{\pi}{6}-\pi=-\dfrac{5\pi}{6}$ (mesure principale).
   $\boxed{\text{Les coordonnées polaires de } A \text{ sont : } A\left[4\,;\,-\dfrac{5\pi}{6}\right]}$.
   Cherchons les coordonnées polaires de B :
   $r=\sqrt{(-3)^2+(3\sqrt{3})^2}=\sqrt{9+27}=\sqrt{36}=6$.
   On cherche alors θ' tel que : $\begin{cases}\cos\theta'=\dfrac{x_B}{r}=\dfrac{-3}{6}=-\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta'=\dfrac{y_B}{r}=\dfrac{-3\sqrt{3}}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$.
   On doit donc avoir : $\begin{cases}\cos\theta'=-\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta'=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}$.
   On sait que $\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ et $\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. un angle qui a un cosinus opposé est $\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}$ (et le même sinus) : $\theta'=\dfrac{2\pi}{3}$.
   $\boxed{\text{Les coordonnées polaires de } B \text{ sont : } B\left[6\,;\,\dfrac{2\pi}{3}\right]}$.
2. On utilise les coordonnes polaires de A et B pour placer ces points.
   On construit d'abord ces deux angles sur le cercle trigonométrique, on trace les demi-droites $[OA)$ et $[OB)$ correspondantes, puis les intersections avec les cercles de centre O et de rayons respectifs 4 et 6.

   Figure à la fin de l'exercice
3. On utilise la relation de Chasles :
   $\left(\overrightarrow{OA}\,;\,\overrightarrow{OB}\right)=\left(\overrightarrow{OA}\,;\,\vec{i}\right)+\left(\vec{i}\,;\,\overrightarrow{OB}\right)=-\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)+\dfrac{2\pi}{3}$
   $=\dfrac{5\pi}{6}+\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{9\pi}{6}=\dfrac{3\pi}{2}$, dont la mesure principale est $\boxed{-\dfrac{\pi}{2}}$.
4. On en déduit que le triangle OAB est **rectangle** en O.
   Il n'est pas isocèle en O, puisque $OA=4$ et $OB=6$.



VII

$x \in \left(\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right[$ et $\sin(x) = \frac{1}{4}$.

1. On a : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donc $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.

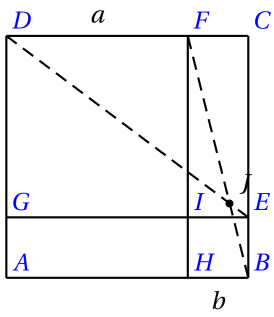
   On en déduit : $\cos(x) = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$; or, $x \in \left(\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right[$, donc $\cos(x) < 0$.

   Par conséquent : $\boxed{\cos(x) = -\frac{\sqrt{15}}{4}}$.

2. On a alors :
   - $\cos(x+\pi) = -\cos(x) = \frac{\sqrt{15}}{4}$
   - $\sin(\pi - x) = \sin(x) = \frac{1}{4}$
   - $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) = \frac{1}{4}$
   - $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) = \frac{\sqrt{15}}{4}$.

VIII

Rappel : si l'on veut calculer un produit scalaire de deux vecteurs en utilisant une projection orthogonale, il faut projeter orthogonalement l'un des vecteurs sur **l'autre** vecteur, ce qui n'était pas possible ici !
Le produit scalaire de deux vecteurs est homogène à un produit de longueurs, donc à une aire.



1. Pour les calculs des différents produits scalaires, il y a deux façons : l'utilisation de la relation de Chasles et des angles droits du carré ou de coordonnées.

   Première méthode :

   - $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{ED} = \left(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}\right).\left(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CD}\right) = \overrightarrow{EC}^2+\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{CF}+\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{CD} = EC^2+0+0+CF\times CD = a^2+b(a+b) = \boxed{a^2+ab+b^2}$
   - $\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{FB} = \left(\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CE}\right).\left(\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CB}\right) = \overrightarrow{FC}^2+\overrightarrow{FC}.\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{CE} = FC^2+0+0+CE\times CB = b^2+a(a+b) = \boxed{a^2+ab+b^2}$
   - $\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{DE} = \left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}\right).\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}\right) = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{CE} = 0-(a+b)\times a+0-b(a+b) = \boxed{-(a+b)^2}$
   - $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{DE} = \left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}\right).\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CE}\right) = 0-a(a+b)+a(a+b)+0 = \boxed{0}$
   - $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BF} = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\right).\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CF}\right) = \cdots = \boxed{0}$
   - $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{EF} = \left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HI}\right).\left(\overrightarrow{EI}+\overrightarrow{IF}\right) = \cdots = \boxed{0}$
   - $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AF} = \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}\right).\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}\right) = \cdots = \boxed{(a+b)^2}$
   - $\overrightarrow{EA}.\overrightarrow{EF} = \left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BA}\right).\left(\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{CF}\right) = \cdots = \boxed{b^2}$
   - $\overrightarrow{FA}.\overrightarrow{FE} = \left(\overrightarrow{FD}+\overrightarrow{DA}\right).\left(\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CE}\right) = \cdots = \boxed{a^2}$

   Deuxième façon : On introduit un repère orthonormal $\left(A\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.
   Les coordonnées des différents points de la figure sont alors :
   $A(0\,;\,0)$; $B(a+b\,;\,0)$; $C(a+b\,;\,a+b)$; $D(0\,;\,a+b)$; $E(a+b\,;\,b)$; $F(a\,;\,a+b)$; $G(0\,;\,b)$; $H(a\,;\,0)$; $I(a\,;\,b)$.
   On calcule alors les coordonnées des vecteurs, puis leur produit scalaire en prenant l'expression analytique du produit scalaire. (les coordonnées des vecteurs peuvent se lire directement sur la figure !)
   Par exemple :
   $\overrightarrow{EF}(-b\,;\,a)$; $\overrightarrow{ED}(-(a+b)\,;\,a)$; $\overrightarrow{EF}.\overrightarrow{ED} = -b\times(-(a+b))+a^2 = b(a+b)+a^2 = a^2+ab+b^2$.
   De même pour les autres vecteurs.

2. On considère le triangle AEF.
   On a : $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{DE} = 0$ donc $\overrightarrow{AF} \perp \overrightarrow{DE}$. LA droite (DE) est donc la hauteur du triangle, issue de E.
   De même : $(BF)\perp(AE)$ donc (FB) est la hauteur issue de F dans ce triangle.
   J, intersection de deux hauteurs, est l'orthocentre.
   La droite (AJ) passe par un sommet et l'orthocentre du triangle AEF ; c'est donc la troisième hauteur. Elle est perpendiculaire à la droite (EF).
   Or, $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{EF} = 0$ donc (AI) est aussi perpendiculaire à (EF).
   Les droites (AI) et (AJ) sont perpendiculaires à la même droite, donc elles sont parallèles. Comme elles ont un point commun, elles sont confondues. Les points A, I et J sont donc **alignés**.

3. **Aire du triangle AEF** : elle est égale à l'aire du carré $ABCD$, privée des aires des triangles qui l'entourent :
   $\mathscr{A}(AEF) = \mathscr{A}(ABCD) - [\mathscr{A}(ABE)+\mathscr{A}(ECF)+\mathscr{A}(FDA)]$
   $= (a+b)^2 - \left[\dfrac{b(a+b)}{2}+\dfrac{ab}{2}+\dfrac{a(a+b)}{2}\right] = (a+b)^2-\dfrac{1}{2}[ab+b^2+ab+a^2+ab] = (a+b)^2-\dfrac{1}{2}(a^2+3ab+b^2) = a^2+2ab+b^2-\dfrac{1}{2}(a^2+3ab+b^2] = \dfrac{2a^2+4ab+2b^2-a^2-3ab-b^2}{2} = \boxed{\dfrac{a^2+ab+b^2}{2}}$.

4. On a : $\mathscr{A}(AEF) = \dfrac{AK\times EF}{2}$ donc $AK = \dfrac{2\times\mathscr{A}(AEF)}{EF} = \boxed{\dfrac{a^2+ab+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}}$