Correction du contrôle (sujet A)

I

(a) (u_n) est définie par : $u_n = 2n^2 - 3n + 1$.
On a : $\boxed{u_0 = 1\,;\, u_1 = 0 \text{ et } u_2 = 3}$

(b) (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n} \end{cases}$.

$u_0 = \boxed{2}$; $u_1 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0} = \dfrac{2-1}{2} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$ et

$u_2 = \dfrac{u_1 - 1}{u_1} = \dfrac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2}} = -\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \boxed{-1}$

II

1. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n+1} \end{cases}$.
   Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} > 0$ donc la suite (u_n) est **croissante**.
2. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 2 \end{cases}$.
   Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 2 > 0$ (car le carré d'un réel est toujours positif) donc la suite (u_n) est **croissante**.

III

1. $u_n = 2n + 3$ est une fonction affine de n, donc la suite (u_n) est **arithmétique**.
2. $u_n = \dfrac{1-5n}{2} = -\dfrac{5}{2}n + \dfrac{1}{2}$; c'est encore une fonction affine de n, donc la suite (u_n) est **arithmétique**.
3. $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n - 3 \end{cases}$. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = -3$ qui est une constante, donc (u_n) est **arithmétique (de raison -3)**.
4. $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = u_n - n \end{cases}$. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = -n$ qui n'est pas une constante, donc (u_n) **n'est pas arithmétique.**

IV

(u_n) est arithmétique, $u_5 = 3$ et $r = \dfrac{1}{2}$.
On sait que, pour tout n et tout $p \leqslant n$: $u_n = u_p + (n-p)r$.
Alors : $u_7 = u_5 + (7-5) \times \dfrac{1}{2} = 3 + 2 \times \dfrac{1}{2} = 4$: $\boxed{u_7 = 4}$

$u_{30} = u_5 + (30-5) \times \dfrac{1}{2} = 3 + 25 \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{31}{2}$: $\boxed{u_{30} = \dfrac{31}{2}}$

V

Comme (u_n) est arithmétique, on a :
$\begin{cases} u_{17} = u_0 + 17r \\ u_{40} = u_0 + 40r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 + 17r = 24 \ (1) \\ u_0 + 40r = 70 \ (1) \end{cases}$
(2)-(1) donne : $40r - 17r = 70 - 24$, c'est-à-dire $23r = 46$. On en déduit $r = 2$.
Alors : $u_0 = 24 - 17r = 24 - 17 \times 2 = -10$.

$$\boxed{u_0 = -10 \text{ et } r = 2}$$

VI

Soit $S = 23 + 26 + 29 + 32 + \cdots + 128$.
C'est la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique, de raison 3.
On pose $u_0 = 23$ et $r = 3$.
Cherchons le rang de 128 : $128 = u_n = u_0 + nr = 23 + 3n$ donc $3n = 128 - 23 = 105$ et $n = 35$.
$S = u_0 + \cdots + u_{35} = \dfrac{36 \times (u_0 + u_{35})}{2} = \dfrac{36 \times (23 + 128)}{2} = 18 \times 151 = 2\,718$

$$\boxed{S = 2\,718}$$

Correction du contrôle (sujet B)

I

(a) (u_n) est définie par : $u_n = 3n^2 - 2n + 1$.
On a : $\boxed{u_0 = 1 \text{ ; } u_1 = 2 \text{ et } u_2 = 9}$

(b) (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n} \end{cases}$.

$u_0 = \boxed{3}$; $u_1 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0} = \dfrac{3-1}{3} = \boxed{\dfrac{2}{3}}$ et

$u_2 = \dfrac{u_1 - 1}{u_1} = \dfrac{\frac{2}{3} - 1}{\frac{2}{3}} = -\dfrac{-\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \boxed{-\dfrac{1}{2}}$

II

1. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n - \dfrac{2}{n+1} \end{cases}$.
   Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = -\dfrac{2}{n+1} < 0$ donc la suite (u_n) est **décroissante**.
2. (u_n) est définie par : $\begin{cases} u_0 = -3 \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 3 \end{cases}$.
   Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 3 > 0$ (car le carré d'un réel est toujours positif) donc la suite (u_n) est **croissante**.

III

1. $u_n = 3n + 2$ est une fonction affine de n, donc la suite (u_n) est **arithmétique**.
2. $u_n = \dfrac{3 - 7n}{2} = -\dfrac{3}{2}n - \dfrac{7}{2}$; c'est encore une fonction affine de n, donc la suite (u_n) est **arithmétique**.
3. $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 5 \end{cases}$. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = 5$ qui est une constante, donc (u_n) est **arithmétique (de raison 5)**.
4. $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = u_n + n + 1 \end{cases}$. Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = n + 1$ qui n'est pas une constante, donc (u_n) **n'est pas arithmétique.**

IV

(u_n) est arithmétique, $u_4 = 2$ et $r = \dfrac{3}{2}$.
On sait que, pour tout n et tout $p \leqslant n$:
$u_n = u_p + (n-p)r$.

Alors : $u_7 = u_4 + (7-4) \times \dfrac{3}{2} = 2 + 3 \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{13}{2}$: $\boxed{u_7 = \dfrac{13}{2}}$

$u_{30} = u_4 + (30-4) \times \dfrac{3}{2} = 2 + 26 \times \dfrac{3}{2} = 2 + 39$: $\boxed{u_{30} = 41}$

V

Comme (u_n) est arithmétique, on a :
$\begin{cases} u_{17} = u_0 + 17r \\ u_{40} = u_0 + 40r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_0 + 17r = 24 \text{ (1)} \\ u_0 + 40r = 70 \text{ (1)} \end{cases}$
(2)-(1) donne : $40r - 17r = 70 - 24$, c'est-à-dire $23r = 46$. On en déduit $r = 2$.
Alors : $u_0 = 24 - 17r = 24 - 17 \times 2 = -10$.

$$\boxed{u_0 = -10 \text{ et } r = 2}$$

VI

Soit $S = 26 + 26 + 29 + 32 + \cdots + 131$.
C'est la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique, de raison 3.
On pose $u_0 = 26$ et $r = 3$.
Cherchons le rang de 131 : $131 = u_n = u_0 + nr = 26 + 3n$ donc $3n = 131 - 26 = 105$ et $n = 35$.
$S = u_0 + \cdots + u_{35} = \dfrac{36 \times (u_0 + u_{35})}{2} = \dfrac{36 \times (26 + 131)}{2} = 18 \times 157 = 2826$

$$\boxed{S = 2826}$$