

Correction du contrôle

I

- $p(A) = p(\bar{A}) \Rightarrow p(A) = 1 - p(A) \Rightarrow 2p(A) = 1 \Rightarrow p(A) = \frac{1}{2} = \boxed{0,5}$.
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \boxed{0,6}$
- $p(\overline{A \cup B}) = 0,35 \Rightarrow p(A \cup B) = 1 - 0,35 = 0,65$.
Alors $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = 0,4 + 0,5 - 0,65 = \boxed{0,25}$
- A et B sont incompatibles donc $A \cap B = \emptyset$ donc $p(A \cap B) = 0$ donc $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \boxed{p(A) + p(B)}$.

II

- Il y a quatre choix possibles pour la première ville, trois pour la deuxième, deux pour la troisième et un pour la dernière. On en déduit que le nombre d'itinéraires possibles est $\boxed{4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24}$.
 - Les itinéraires contenant C et D à la suite dans cet ordre sont :
C-D-A-B; C-D-B-A; A-C-D-B; B-C-D-A; A-B-C-D et B-A-C-D.
La probabilité de tomber sur un tel itinéraire est donc égale à $\frac{6}{24} = \boxed{\frac{1}{4}}$.
Remarque : il y a trois emplacements possibles pour le groupe C-D et pour chacun d'entre eux, deux permutations possibles des villes A et B.
 - Il n'y a que deux itinéraires commençant par C et se terminant par D :
ce sont C-A-B-D et C-B-A-D.
La probabilité de tomber sur un tel itinéraire est donc égale à $\frac{2}{24} = \boxed{\frac{1}{12}}$.
 - Par symétrie, il est clair qu'il y a autant d'itinéraires ayant C avant D que d'itinéraires ayant D avant C. La probabilité cherchée est donc $\boxed{\frac{1}{2}}$.

III

- D'après l'énoncé, on a : $p(M) = 0,4$; $p(C) = 0,6$;
 $p(M \cap C) = 0,15$
- $p(M \cap C) = 0,15$ (le résultat est donné dans l'énoncé!).
 - $M = (M \cap C) \cup (M \cap \bar{C})$; c'est une réunion d'événements incompatibles, donc
 $p(M) = p((M \cap C) \cup (M \cap \bar{C})) = p(M \cap C) + p(M \cap \bar{C})$.
La probabilité que l'individu aime la musique mais pas le cinéma est : $p(M \cap \bar{C}) = p(M) - p(M \cap C) = 0,4 - 0,15 = 0,25$.

- La probabilité que l'individu interrogé aime le cinéma mais pas la musique est : $p(C \cap \bar{M})$.
De même, on a : $C = (C \cap M) \cup (C \cap \bar{M})$ (réunion d'événements incompatibles).
Par conséquent : $p(C) = p(C \cap M) + p(C \cap \bar{M})$, d'où :
 $p(C \cap \bar{M}) = p(C) - p(C \cap M) = 0,6 - 0,15 = 0,45$.
- L'événement « la personne n'aime ni le cinéma ni la musique » est $\overline{C \cap M}$ qu'on peut voir comme l'événement contraire de $C \cap M$ (aimer l'un ou l'autre).
On en déduit : $p(\overline{C \cap M}) = p(\overline{C \cap M}) = 1 - p(C \cap M) = 1 - [p(M) + p(C) - p(C \cap M)] = 1 - (0,4 + 0,6 - 0,15) = 1 - 0,85 = 0,15$.

IV

- Pour $x \neq 0$, $2x^3 + 5x + 1 = x^3 \left(2 + \frac{5}{x^2 + \frac{1}{x^3}} \right)$.
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{5}{x^2 + \frac{1}{x^3}} \right) = 2$ donc, par produit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^3 + 5x + 1) = -\infty$.
- Pour $x \neq 0$, $\frac{3x^2 + 5x + 1}{x^2 + x + 1} = \frac{x^2 \left(3 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{3 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}$.
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = 3$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = 1$.
Par quotient : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2 + 5x + 1}{x^2 + x + 1} \right) = 3$
- Pour $x \neq 0$, $\frac{2x^3 - 7x + 5}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{x^3 \left(2 - \frac{7}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right)}{x^4 \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)} = \frac{2 - \frac{7}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{x \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)}$.
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{7}{x^2} + \frac{5}{x^3} \right) = 2$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right) = 1$.
On en déduit que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^3 - 7x + 5}{x^4 + x^2 + 1} \right) = 0$.
- On ne met en facteur les termes de plus haut degré que pour la recherche des limites à l'infini.
Pour $x \neq 0$, $\frac{x^2 + 3x}{x^2 - x} = \frac{x(x+3)}{x(x-1)} = \frac{x+3}{x-1}$.
 $\lim_{x \rightarrow 0} (x+3) = 3$; $\lim_{x \rightarrow 0} (x-1) = -1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 3x}{x^2 - x} \right) = -3$.

e) Rappel : si la limite existe, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0}. \text{ Par conséquent :}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - 1}{x} \right) = \cos'(0) = -\sin 0 = 0$$

V

Soit $f(x) = \frac{2x^2 + 3x + 1}{x + 2}$.

1. (a) On a clairement $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

(b) Limite en $-\infty$:

$$f(x) = \frac{x^2 \left(2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{x \left(1 + \frac{2}{x} \right)} = \frac{x \left(2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right)}{1 + \frac{2}{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right) = 2 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{2}{x} \right) = 1.$$

On en déduit que : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

Limite en $+\infty$: de même, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Limite en -2 :

$$\lim_{x \rightarrow -2} (2x^2 + 3x + 1) = 3.$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} (x + 2) = 0 \text{ avec } x + 2 < 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -\infty.$$

De même : $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} (x + 2) = 0$ avec $x + 2 > 0$ donc

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = +\infty.$$

(c) Comme f n'est pas définie en -2 et que

$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \pm \infty$, \mathcal{C}_f admet comme asymptote la droite d'équation $x = -2$.

2. (a) Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $ax + b + \frac{c}{x+2} = \frac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2} = \frac{ax^2 + (2a+b)x + 2b+c}{x+2}$.

Ce doit être égal à $f(x)$: on identifie les coefficients. On obtient le système :

$$\begin{cases} a=2 \\ 2a+b=3 \\ 2b+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-1 \\ c=3 \end{cases}$$

Par conséquent : $f(x) = 2x - 1 + \frac{3}{x+2}$.

(b) $f(x) - (2x - 1) = \frac{3}{x+2}$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{3}{x+2} \right) = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (2x - 1)] = 0$.

La droite Δ d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à \mathcal{C}_f en $-\infty$ et en $+\infty$.

(c) $f(x) - (2x - 1) = \frac{3}{x+2}$ qui est du signe de $x + 2$, donc négatif pour $x < -2$ et positif pour $x > -2$.

On n déduit que \mathcal{C}_f est au-dessus de Δ pour $x > -2$ et en dessous pour $x < -2$.

(d) Si l'on veut étudier complètement la fonction pour pouvoir la tracer correctement, il faut calculer la dérivée pour étudier les variations.

$$f(x) - 2x - 1 + 3 \times \frac{1}{x+2} \text{ donc } f'(x) = 2 + 3 \times$$

$$\left(-\frac{1}{(x+2)^2} \right) = \frac{2(x+2)^2 - 3}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 8x + 5}{(x+2)^2}.$$

$f'(x)$ est du signe de $2x^2 + 8x + 5$. $\delta = 64 - 40 = 24 > 0$.

Il y a deux racines : $x_1 = \frac{-8 - \sqrt{24}}{4} =$

$$\frac{-8 - 2\sqrt{6}}{4} = \frac{-4 - \sqrt{6}}{2} < -2 \text{ et } x_2 = \frac{-4 + \sqrt{6}}{2} >$$

-2 . $2x^2 + 8x + 5$ est positif à l'extérieur des racines.

On en déduit le tableau de variations :

x	$-\infty$	$\frac{-4 - \sqrt{6}}{2}$	-2	$+\infty$
$f'(x)$	+	ϕ	-	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(x_1)$	$-\infty$	$+\infty$

Courbe :

