Suites numériques : TD n° 4

I Exercice de l'épreuve expérimentale bac TS 2006-2007

Une suite v est définie par son premier terme v_0 et par la relation de récurrence : pour tout entier naturel n,
$v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n + 6$.

1. À l'aide de la calculatrice ou du tableur, émettre une conjecture sur la limite ℓ de la suite v, selon les valeurs de v_0.
   Appeler le professeur pour valider la conjecture.
2. La suite w est définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - \ell$.
   (a) Observer à la calculatrice ou au tableur les premiers rangs de la suite w.
   Quelle semble être la nature de la suite w ? Est-elle arithmétique ? g«eométrique ? ni arithmétique, ni géométrique ?
   Appeler le professeur pour valider la conjecture.
   (b) Démontrer la propriété conjecturée sur la nature de la suite w.
   (c) Exprimer pour tout entier naturel n, w_n puis v_n en fonction de n.
   (d) Déterminer la limite de la suite v.
   (e) Ce résultat est-il cohérent avec l'expérimentation ?

II Suite de Syracuse

On définit la suite (u_n) ainsi :
u_0 est un entier positif.
Si u_n est pair alors $u_n = \frac{1}{2}u_n$, sinon $u_{n+1} = 3u_n + 1$.
On souhaite étudier l'évolution des termes de la suite quand n devient de plus en plus grand.
Pour cela, on va utiliser un tableur. On va utiliser deux fonctions particulières d'un tableur :
Fonction MOD : Mod(A2 ; 2) donne le reste de la division euclidienne de A2 par 2 (division vue en primaire) ; ce reste vaut 0 si A2 est pair, 1 sinon.
Si(P ;Q ;R) où P est une formule de test ; cette fonction est à comprendre ainsi : Si P est vraie, alors le contenu de la case est Q ; si P est fausse, alors le contenu de la case est R.
On va donc remplir les premières cases ainsi :

	A	B
1	Premier terme	a
2		
3	n	$u(n)$
4	1	$= B1$
5	2	$= SI(MOD(B4;2) = 0; B4/2; 3 * B4 + 1)$

On recopie alors la formule écrite en B5 vers le bas.

1. Choisir différentes valeurs de a (en tapant différentes valeurs d'entiers dans la case B1.
   Que constate-t-on sur les les termes de la suite ?
2. Que se passe-t-il une fois que le nombre 1 est apparu ? Pourquoi ?
3. Le nombre 1 apparaît-il rapidement ? Combien faut-il de termes pour $a = 9$? et pour $a = 27$
4. Pourquoi est-on sûr qu'avec a puissance de 2, un des termes de la suite vaut 1 ?
5. Pourquoi cette suite est-elle célèbre ? chercher par exemple sur Google : suite+syracuse+Wikipedia

III D'après un exercice de l'épreuve expérimentale bac TS 2006-2007

On considère la suite récurrente (u_n) de premier terme $u_0 = 0$ et telle que, pour tout entier naturel n,
$u_{n+1} = u_n + 2n - 11$.

1. En utilisant un tableur ou une calculatrice calculer et représenter graphiquement les 20 premiers termes de cette suite. Le nuage de points obtenus a-t-il une particularité ? Si oui laquelle ?
   Appeler le professeur pour une vérification de la particularité trouvée.
2. n étant donné, on peut calculer la valeur de u_n si on connaît la valeur de u_{n-1}. On voudrait à présent pouvoir calculer, pour n'importe quelle valeur de l'entier naturel non nul n, la valeur de u_n sans pour autant connaître la valeur de u_{n-1} . Pour cela il faudrait disposer d'une formule donnant u_n en fonction de n.
   (a) À l'aide des observations faites dans la première question, conjecturer une formule donnant, pour n'importe quelle valeur de l'entier naturel n, u_n en fonction de n.
   Appeler le professeur pour une vérification de la formule trouvée.
   (b) Vérifier à l'aide du tableur ou de la calculatrice que la formule donne trouvée donne les bonnes valeurs pour les 20 premiers termes. Qu'en est-il pour les 20 termes suivants ?
   (c) Cela suffit-il pour être sûr que la formule est bonne ?