1S2 : TD dérivation (4)

I Dérivées successives d'une fonction

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Sa dérivée est f'. f' est une fonction.
Si f' est elle-même dérivable, on note f'' sa dérivée.
Si f'' est dérivable, on note $f^{(3)}$ sa dérivée, donc $f^{(3)} = \left(f''\right)'$.
Plue généralement, on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième. $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

1. Soit $f(x) = x^4 - 5x^2 + 2$. Calculer les dérivées successives de f.
2. Même question avec $f(x) = \sin x$. Que remarque-t-on ?
3. Même question avec $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$. Conjecturer une formule générale de $f^{(n)}(x)$ en fonction de n ?

II

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - \frac{3}{4}x + 1.$$

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère.

1. Déterminer la dérivée f', puis f''.
2. Étudier le signe de f'' ; en déduire le tableau de variations de f'.
3. Calculer $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)$; en déduire le signe de $f'(x)$ en fonction de x.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Donner les équations des tangentes T et T' à $\mathscr{C}$ en -1 et en 1.
   Tracer les deux tangentes T, T' et $\mathscr{C}$.

III

Soit P la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = -4x^3 - 3x^2 + 2.$$

1. (a) Étudier les variations de P.
   (b) En déduire que l'équation $P(x) = 0$ n'a qu'une solution, que l'on note α.
   (c) Donner le signe de $P(x)$ en fonction de la position de x par rapport à α.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^3+1}.$$

   (a) Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.
   (b) En déduire le tableau de variations de f.