Probabilités

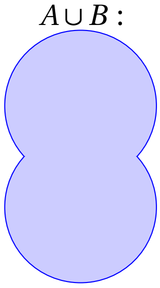
Table des matières

I Petits rappels sur le vocabulaire des ensembles

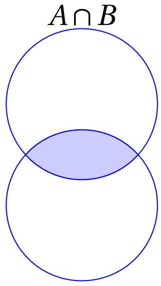
I.1 Définitions

Soient A et B deux ensembles.
$A \cup B$ est la réunion de A et de B : c'est l'ensemble des éléments appartenant à A **ou** à B (ou aux deux).
$A \cap B$ est l'intersection de A et de B : c'est l'ensemble des éléments appartenant à A **et** à B. $A \in B$ se lit : A est inclus dans B ; c'est le cas si tous les éléments de A sont dans B.

$A \cup B$:



$A \cap B$



Remarque : $A \cup B = B \cup A$; $A \cap B = B \cap A$.

Soit E un ensemble et A un sous-ensemble (donc $A \in E$). on note $\overline{A}$ le complémentaire de A dans E ; $\overline{A}$ est formé de tous les éléments de E qui ne sont pas dans A.

I.2 Propriétés

Soient A, B, C trois ensembles :

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

II Le vocabulaire des événements

II.1 Les événements

Définition

On effectue une **expérience aléatoire** (c'est-à-dire une expérience dont on ne peut prévoir le résultat)conduisant à n **éventualités** ou **issues** : e_1, e_2, $\cdots$, e_i, $\cdots$, e_n.
L'ensemble de toutes les éventualités de l'expérience aléatoire est l'**univers**, noté généralement $\Omega = \{e_1; e_2; \cdots; e_i; \cdots, e_n\}$.
Toute partie de l'univers est un **événement**.
Un événement qui ne contient qu'une seule éventualité est un **événement élémentaire**.
Ω est l'**événement certain** ;
$\emptyset$ est l'**événement impossible**.

Exemples :

- On lance une fois un dé.
  L'univers est $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.
  1 est une éventualité.
  Obtenir un nombre pair est l'événement : $\{2; 4; 6\}$.
  Obtenir 6 est un événement élémentaire.
- On lance deux dés rouge et vert ; on note en premier le résultat du dé rouge et ensuite, le résultats du dé vert :
  $\Omega = \{(1\ ;\ 1)\ ;\ (1\ ;\ 2)\ ;\ (1\ ;\ 3)\ ;\ \cdots (1\ ;\ 6)\ ;\ (2\ ;\ 1)\ ;\ (2\ ;\ 2) \cdots (6\ ;\ 6)\}$
  Ω comprend 36 éléments : $\text{Card}(\Omega) = 36$
- En supposant que le sexe d'un bébé survient au hasard, quelles sont les possibilités pour les sexes des familles de deux enfants :
  $\Omega = \{GG\ ;\ FG\ ;\ GF\ ;\ FF\}$

II.2 Evénéments incompatibles

Définition

Deux événements qui n'ont aucune éventualité commune sont dits **incompatibles** ou **disjoints**.

Exemple : On tire une carte d'un jeu de 32 cartes.
Les événements « tirer un roi« et « tirer un sept »sont incompatibles.
Par contre, les événements « tirer un roi »et « tirer une carte de coeur »ne sont pas incompatibles : ils ont l'éventualité « roi de coeur »en commun.

II.3 Événements contraires

Définition

Si A est un événement de l'univers Ω, l'événement constitué de toutes les éventualités de Ω qui ne sont pas dans A est appelé **l'événement contraire de A**, et il est noté $\overline{A}$.

Exemple : Quand on lance une fois un dé, l'événement « obtenir un nombre pair »est le contraire de l'événement « obtenir un nombre impair ».

III Calcul de probabilités

III.1 Définition

Soit $\Omega = \{e_1; e_2; \cdots; e_i; \cdots, e_n\}$ l'univers d'une expérience aléatoire.
À chaque événement élémentaire $\{e_i\}$, on associe un nombre réel p_i de $[0;1]$, appelé **probabilité** de cet événement élémentaire $\{e_i\}$, $p_i = P = (e_i)$ tel que :

- $0 \leq p_i \leq 1$,
- la somme de ces nombres est : $p_1 + p_2 + \cdots + p_i + \cdots + p_n = 1$

III.2 Loi des grands nombres

On répète un grand nombre de fois. une expérience aléatoire identique ayant n issues possibles : $e_1, e_2, \ldots e_n$.
On note $f_n(k)$ la fréquence d'apparition de l'événement e_k. On définit une loi de probabilité sur Ω : on note $p(k)$ la probabilité de e_k.
On a un modèle cohérent si $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(k) = p(k)$.

III.3 Loi équirépartie, équiprobabilité

Définition

- Si tous les événements élémentaires $e_1; e_2; \cdots; e_i; \cdots; e_n$ ont la même probabilité, on dit que les événements élémentaires sont **équiprobables**. Alors : $p_1 = p_2 = \cdots = p_n = \dfrac{1}{n}$.
- S'il y a équiprobabilité, alors pour tout événement A,

$$p(A) = \frac{\text{nombre d'éléments de} A}{\text{Nombre d'éléments de } \Omega} = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$

Exemples :

1. On lance une pièce équilibrée. Les événements : tomber sur pile et tomber sur face sont équiprobables ; ils ont chacun une probabilié de $\dfrac{1}{2}$.
2. On lance un dé à six faces équilibré. Les événements : obtenir un 1 ; obtenir un 2 ; $\cdots$; obtenir un 6 sont équiprobables. Ils ont chacun une probabilié de $\dfrac{1}{6}$.
3. Si l'on reprend l'exemple du dé non pipé. On considère l'événement A : obtenir un nombre pair.
   Alors $A = \{2; 4; 6\}$. Chaque événement étant équiprobable, $p(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$.

III.4 Propriétés

Parties de Ω	Vocabulaire des événements	Propriété
A	A événement quelconque $A \subset \Omega$	$0 \leq P(A) \leq 1$
$\emptyset$	événement impossible	$P(\emptyset) = 0$
Ω	événement certain	$P(\Omega) = 1$
$A \cap B = \emptyset$	A et B sont incompatibles	$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
$\overline{A}$	événement contraire de A	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
A, B	A et B événements quelconques	$P(A \cup B)$ $= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Remarque : $p(\emptyset) = 0$, mais $p(A) = 0$ n'implique pas que $A = \emptyset$, sauf pour un ensemble fini.

III.5 Exemples

1. On considère un jeu de 32 cartes. A est l'événement : « tirer une carte de pique » ; B est l'événement : « tirer un valet ».
   Il y a huit cartes de pique dans le jeu, donc, les événements étant équiprobables, $p(A) = \dfrac{8}{32}$.
   Il y a quatre valets dans le jeu. Les événements étant équiprobables, $p(B) = \dfrac{4}{32}$.
   L'événement $A \cap B$ est : « tirer un valet de pique ». Sa probabilité est donc $\dfrac{1}{32}$.
   Alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \dfrac{8}{32} + \dfrac{4}{32} - \dfrac{1}{32} = \dfrac{11}{32}$.

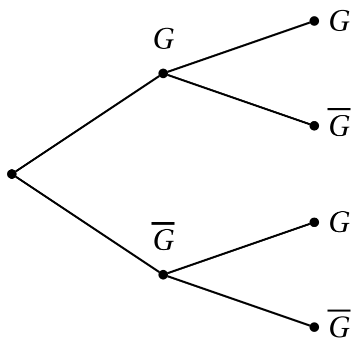
2. Dans le jeu de trente-deux cartes, l'événement : « obtenir une carte de coeur, carreau ou trèfle »est l'événement contraire de l'événement A : « obtenir une carte de pique ».
   Donc $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{8}{32} = \frac{32}{32} - \frac{8}{32} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}$.
3. On lance 3 fois de suite une pièce de monnaie équilibrée et on note la face obtenue à chaque fois.
   $\Omega = \{PPP\ ;\ FPP\ ;\ PFP\ ;\ PPF\ ;\ FFP\ ;\ FPF\ ;\ PFF\ ;\ FFF\}$
   $A = \{PPP; FFF\}$ est un événement.
   Les événements élémentaires sont : {PPP} ; {FPP} ; {PFP}
   {PPF} ; {FFP} ; {FPF} ; {PFF} ; {FFF}

   Si $B = \{PPF; PFP; FFP\}$ alors $A \cap B = \emptyset$ ou A et B sont incompatibles
   $\overline{A} = \{FPP\ ;\ PFP\ ;\ FPF\ ;\ FFF\}$

III.6 Utilisation d'un arbre

Exemple 1 : on suppose que la probabilité pour une famille quelconque d'avoir une fille est la même que celle d'avoir un garçon'.
On s'intéresse aux familles de deux enfants ; quelle est la probabilité d'avoir deux enfants de sexes différents ?
Le plus simple est de faire un arbre. On note G_1 l'événement « avoir un garçon la première fois »et donc $\overline{G_1}$ l'événement « avoir une fille »la première fois.
On note G_2 l'événement « avoir un garçon lors de la deuxième naissance ».

L'arbre est alors :



Exemple 2
On lance trois fois une pièce de monnaie, parfaitement équilibrée. On veut savoir la probabilité d'avoir exactement deux Pile et une Face, dans n'importe quel ordre.
On fait un arbre et on compte le nombre final de sous-branches : il y en a 8, dont trois sont favorables à l'événement considéré : la probabilité cherchée est donc $\frac{3}{8}$.

On verra plus en détails l'utilisation d'arbres en Terminale.

IV Variable aléatoire

IV.1 Définition

On se place dans l'ensemble Ω, muni de la probabilité P.
Une **variable aléatoire** X est une application définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Sa valeur dépend de l'issue de l'expérience aléatoire.

Exemple : On lance deux fois de suite une pièce de monnaie équilibrée. On gagne 2 euros pour chaque

résultat »pile« , et on perd 1 euro pour chaque »face« .
L'ensemble des issues est : $\Omega = \{PP; FP; FP; FF\}$. Il y a équiprobabilité puisque la pièce est équilibrée.
Soit X l'application définie sur Ω qui à chaque issue associe le gain correspondant. Donc X prend les valeurs : 4 ; 1 ou -2. X est une variable aléatoire.
Pour chaque valeur possible (par exemple 1), on peut considérer l'événement $(X = 2) = \{PF; FP\}$ et lui associer sa probabilité. On obtient alors une loi de probabilité sur l'ensemble des gains : Les valeurs possibles sont : $\{4; 1; -2\}$.
Cette loi est appelée **loi de** X et est notée P_X.

gain x_i	$x_1 = -2$	$x_2 = 1$	$x_3 = 4$
probabilité $p_i = P(X = x_i)$	0.25	0.5	0.25

Exemple : Une urne contient 2 boules bleues, trois vertes et une jaune. On prend au hasard trois boules de l'urne. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de couleurs présentes parmi les trois boules.
Quelles sont les valeurs prises par X ?
Quelle est la loi de probabilité de X ?

IV.2 Espérance, variance et écart-type

Soit $\Omega = \{x_1; x_2; \cdots; x_n\}$ muni d'une probabilité P telle que $P(\{x_i\}) = p_i$.

Définition

On appelle :

- **espérance** de la loi P la nombre : $\mu = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$;
- **variance** de la loi P le nombre : $V = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \mu)^2$;
- **écart-type** de la loi P le nombre : $\sigma = \sqrt{V}$.