$1S_2$: contrôle sur les barycentres (1 heure)

I (1,5 point)

A et B sont deux points du plan tels que $AB = 6$ cm. Construis les points G_1 et G_2, respectivement barycentres des systèmes $\mathscr{S}_1 = \{(A ; 1) ; (B ; 5)\}$ et $\mathscr{S}_2 = \{(A ; 5) ; (B ; -3)\}$.

II (2,5 points)

Chacun des cas suivants détermine un point G. Déterminer alors un système de points dont G est le barycentre :

a) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{GB}$.

b) $3\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{GA} - 7\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$

III (3 points)

Les points A, B et C vérifient :

$$5\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}.$$

1. Exprimer C comme barycentre de A et de B.
2. On sait que $AB = 4$. Calculer AC. Faire une figure.

IV (4 points)

Soient ABC un triangle, A' le barycentre de $\{(A ; 1) ; (C ; 3)\}$, C' le barycentre de $\{(A ; 1) ; (B ; 2)\}$ et G le barycentre de $\{(A ; 1); (B ; 2); (C ; 3)\}$.
Parmi les propositions suivantes, indiquer si elles sont vraies ou fausses et **justifier**.

1. G est le milieu de $[CC']$.
2. Si M est quelconque alors :

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MG}.$$

3. A est le barycentre de $\{(B ; 2); (C ; 3); (G ; -6)\}$.

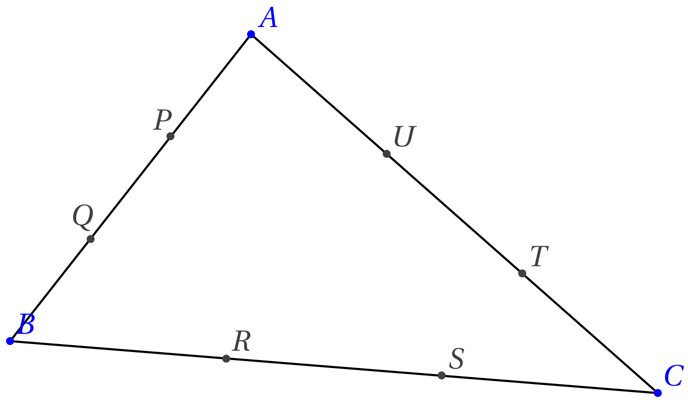
V (4 points)

Dans le plan, $ABCD$ est un parallélogramme.
I est le barycentre de $(A ; -2)$ et $(B ; 5)$.
J est le barycentre de $(C ; 1)$ et $(D ; 2)$.

1. Construire I et J.
2. Pour tout point M du plan, exprimer :
   (a) $-2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{MI}$
   (b) $\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD}$ en fonction de $\overrightarrow{MJ}$.
3. (a) Quel est l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M tels que :
   $\left\|-2\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD}\right\|$?
   (b) Démontrer que le milieu de $[BC]$ appartient à $\mathscr{E}$.

VI (5 points)

Chacun des trois côtés d'un triangle ABC est partagé en trois segments en même longueur.



$AP = PQ = QB$; $BR = RS = SC$; $CT = TU = UA$
On veut montrer que les droites (PS), (RU) et (QT) sont concourantes.

1. Montrer que P est barycentre du système $\{(A ; 2) ; (B ; 1)\}$.
2. De quel système S est-il le barycentre ?
3. On note G le barycentre du système $\{(A ; 2) ; (B ; 2) ; (C ; 2)\}$.
   Montrer que G est le barycentre de P et S, affectés de coefficients que l'on déterminera.
4. Après avoir écrit U et R comme barycentre de deux points pondérés à déterminer, montrer que G est le barycentre de U et R.
5. Montrer de même que G est le barycentre de Q et T.
6. Conclure.