1S2 : Devoir sur feuille n° 3

I

Existe-t-il des triangles rectangles dont les mesures des côtés sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique ?

II

Une plaque d'isolant phonique absorbe 45 % du son qui la traverse. Combien doit-on superposer de plaques d'isolant pour que l'intensité du son soit inférieure à 8 % de sa valeur initiale ?

III

(u_n) est la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + \dfrac{1}{4} \end{cases}$ et (v_n) est définie par $v_n = u_n - \dfrac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Représenter graphiquement les preiers termes de la suite (u_n). Quel semble être le comportement de cette suite ?
2. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.
3. Exprimer alors v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.

IV

On considère la suite (u_n) définie pour $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 3}{3u_n - 1} \end{cases}$

On admet dans un premier temps que, pour tout n, $u_n \neq \dfrac{1}{3}$, car sinon, la suite ne serait plus définie à partir d'un certain rang.

1. (a) Montrer que si un terme est égal à 1, celui qui le précède est aussi égal à 1.
   (b) En déduire que, pour tout n, $u_n \neq 1$.
2. Calculer les termes u_1, u_2, u_3 et u_4.
3. On pose, pour tout n : $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 1}$. Que remarque-t-on ?
   (a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique ; préciser sa raison.
   (b) Calculer v_0, puis déterminer v_n en fonction de n. Déterminer alors u_n en fonction de u_n
   (c) Vérifier que l'on retrouve les valeurs de u_1, u_2, u_3 et u_4 calculées précedemment.

V

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 2.$$

1. (a) Étudier les variations de g.
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique, notée α dans l'intervalle [-4 ; -3].
   (c) Déduisez-en le signe de g selon les valeurs de x.
2. Soit f la fonction définie sur $]-\infty\,;\,-1[\cup]-1\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{(x+1)^2}.$$

   (a) Calculer la dérivée f' de f et montrer que :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^3}.$$

   (b) En déduire les variations de f (utiliser la question 1 et la valeur α)

VI

On appelle pendule simple un objet de masse m, suspendu à un fil de masse négligeable. Au repos, la position de l'objet donne la verticale du lieu où l'objet est suspendu. Si on écarte le pendule de sa position d'équilibre d'un certain angle (pas trop grand) et qu'on le lâche, le pendule oscille de manière périodique (comme le balancier d'une horloge).
La période d'un pensule est la durée constante qui sépare deux instants consécutifs où le pendule passe par la même position, dans le même sens.
La période T d'un pendule est donnée par la formule
$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$ où L est la longueur du pendule (longueur du fil) et g la constante de gravitation. (L en mètres et $g \approx 9{,}81\text{m.s}^{-2}$).

1. On fait varier la longueur du pendule. On note T' la période qui correspond à la nouvelle longueur L'.
   Démontrer que : $\dfrac{T' - T}{T} = \sqrt{\dfrac{L'}{L}} - 1$.
2. On note $h = L' - L$ et on suppose que la variation de longueur h est petite par rapport à L.
   Montrer qu'une valeur approchée de $\dfrac{T' - T}{T}$ est $\dfrac{h}{2L}$.

VII

1. Démontrer que les milieux des côtés d'un carré forment un carré.
2. Soit ABCD un carré. On construit des carrés emboîtés, successivement, à partir des milieux des côtés du carré précédent. (voir figure)
   Le carré initial a pour côté 4 unités.
   On appelle ℓ_n la longueur du côté du carré $A_nB_nC_nD_n$.
   (a) Que peut-on dire de la suite (ℓ_n) ?
   (b) Que vaut ℓ_{10} ?