1S2 : DM n° 2

I

1. u, v et w sont trois fonctions dérivables sur un même intervalle I.
Démontrer que $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$.
(indication : poser $t = vw$, dériver ut et t...)
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = (3x-1)\left(\frac{1}{2}x+2\right)(7-5x).$$
Calculer $f'(x)$.

II

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{5x}{2(x^2+1)}$.
On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Déterminer l'équation réduite de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}$ en O, origine du repère.
3. Étudier la position relative de $\mathscr{C}$ et de Δ.

III

Soient $f : x \longmapsto -x^2+3$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $g : x \longmapsto \dfrac{2}{x}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$.

On appelle $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

1. Tracer les deux courbes dans le même repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.
2. Montrer que les deux courbes ont une tangente commune T au point A de coordonnées $(1\,;\,2)$ et donner l'équation de cette tangente.
3. Étudier la position de chacune des courbes par rapport à la tangente T.

IV

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$
$\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère.
Déterminer a, b, $c$et d pour que la courbe $\mathscr{C}$ possède les propriétés suivantes :

- $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée 20.
- $\mathscr{C}$ passe par le point $A(-1\,;\,18)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur 3.
- $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0.

V

Une personne désire clôturer un terrain rectangulaire de 450 m^2 dont un côté s'appuie sur le bord rectiligne d'une rivière, ce côté ne nécessitant pas de clôture.
Déterminer les dimensions x et y de ce terrain pour que la longueur de la clôture soit minimale.

VI Lieu géométrique :

Dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$, on note $\mathscr{H}$ l'hyperbole d'équation $y = \dfrac{1}{x}$ et d_m la droite d'équation $y = 2x+m$, $(m \in \mathbb{R})$.
À chaque réel m, correspond ainsi une droite d_m.

1. Démontrer que toutes les droites d_m sont parallèles.
2. (a) Construire $\mathscr{H}$ et les droites d_0, d_1 et d_{-2}.
   (b) Démontrer que, pour tout réel m, la droite d_m coupe $\mathscr{H}$ en deux points distincts M et N.
3. On note I le milieu de $[MN]$.
   (a) Calculer les coordonnées de I en fonction de m.
   (b) En déduire que le lieu de I est une droite dont on donnera l'équation réduite (c'est-à-dire que I décrit une droite lorsque m décrit l'ensemble $\mathbb{R}$)