Fonctions de référence

Table des matières

I Généralités sur les fonctions

Soit $\mathscr{D}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles.
Une fonction numérique f est un procédé qui, à chaque nombre de x de $\mathscr{D}$ associe un **unique** nombre, noté $f(x)$.
Le réel x est appelé la **variable**.
$f(x)$ est **l'image** de x par f.
L'ensemble de définition de f, $\mathscr{D}_f$, est l'ensemble des valeurs our lesquelles $f(x)$ existe.
x est un antécédent de $f(x)$.
On écrit : $f : \begin{array}{l} \mathscr{D} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{array}$

Remarques

- Un nombre ne peut avoir qu'une seule image par une fonction f.
- Un nombre peut avoir plusieurs antécédents par f ; exemple : pour $f(x) = x^2$, on a $f(-2) = f(2) = 4$ donc 4 a deux antécédents par f

Exemples :

1. Sur $\mathbb{R}$, on considère la fonction $f : x \mapsto 3x^2 + 5x - 4$.
   Calculer les images de 0, 3, 5 et -1.
   - $f(0) = 3 \times 0^2 + 5 \times 0 - 4 = -4$
   - $f(3) = 38$
   - $f(5) = 3 \times 5^2 + 5 \times 5 - 4 = 96$
   - $f(-1) = 3 \times (-1)^2 + 5 \times (-1) - 4 = -5$

2. $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. $g(x) = x^2$.
Quels sont les antécédents de -4 ? de 2 ?
-1 a-t-il des antécédents ?

Réponses :
x est un antécédent de -4 si $g(x) = -4$, donc $x^2 = -4$.
Or, $x^2 \geqslant 0$ donc x^2 ne peut pas Ître égal à -4 qui est négatif.
-4 n'a pas d'antécédent.

Les antécédents de 2 sont les nombres x tels que $x^2 = 2$, donc $x^2 = 2$.
2 a donc pour antécédents $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.
(**rappel** : pour $a \geqslant 0$, l'équation $x^2 = a$ possède deux solutions, $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$; en effet, $x^2 = a$ s'écrit $x^2 - a = 0$, d'où $x^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2 = 0$ soit $\left(x + \sqrt{a}\right)\left(x - \sqrt{a}\right) = 0$ après factorisation ; on a bien les deux solutions proposées, en utilisant le fait qu'une produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.)

x est un antécédent de -1 si et seulement si $g(x) = -1$, donc si et seulement si $x^2 = -1$, ce qui est impossible car $x^2 \geqslant 0$.
-1 n'a pas d'antécédent par g.

Courbe représentative

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}$.
La courbe $\mathscr{C}_f$, représentative de f, est l'ensemble des points $M(x\,;\, f(x))$ où $x \in \mathscr{D}$.

x est donc l'abscisse et $f(x)$ l'ordonnée d'un point M de la courbe $\mathscr{C}_f$.

II Fonctions affines

II.1 Définition :

Définition

Une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ est affine s'il existe deux réels a et b tel que, pour tout x, $f(x) = ax + b$.

Propriété

Soit $f : x \mapsto ax + b$ une fonction affine.
La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.
a est le coefficient directeur et b l'ordonnée à l'origine, c'est-à-dire que la droite passe par le point de coordonnées $(0\,;\, b)$.

II.2 Variations

Théorème

Soit f une fonction affine définie par : $f(x) = ax + b$.

- f est croissante si, et seulement si, $a > 0$.
- f est constante si, et seulement si, $a = 0$.
- f est décroissante si, et seulement si, $a < 0$.

Démonstration :
Soient deux nombres quelconques x_1 et x_2, avec $x_1 < x_2$.
$f(x_2) - f(x_1) = (ax_1 + b) - (ax_2 + b) = ax_1 + -ax_2 - b = a(x_2 - x_1)$.
Comme $x_2 - x_1$ est positif, $f(x_2) - f(x_1)$ est feu signe de a, donc positif si $a > 0$ (f est alors croissante), constant si $a = 0$ et négatif (donc f décroissante) si $a < 0$.

$\boxed{\text{Pour } a > 0}$:

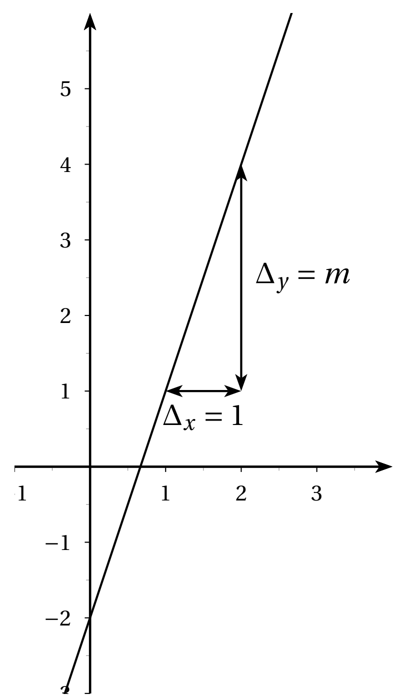
x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

$\boxed{\text{Pour } a < 0}$:

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$

II.3 Interprétation du coefficient directeur

Interprétation graphique de m : $m = \dfrac{\Delta_y}{\Delta_x}$ donc $\Delta_y = m\Delta_x$.
Si l'on prend $\Delta_x = 1$, on a $\Delta_y = m$.
Autrement dit : si l'on se déplace de 1 unité parallèlement à l'axe des abscisses, on se déplace en même temps de m parallèlement à l'axe des ordonnées.
Remarque : si l'on se déplace de k unités parallèlement à l'axe des abscisses, on se délace dans le même temps de km unités parallèlement à l'axe des ordonnées.



On peut facilement visualiser l'influence des deux paramètres, coefficient directeur et ordonnée à l'origine, à l'aide d'un ordinateur. On peut par exemple voir les deux fichiers suivants qui montrent ce qui se passe quand on fait varier l'ordonnée à l'origine pour le prier, le coefficient directeur pour le second. (Il faut avoir Java sur son ordinateur).

- cliquer sur variations de l'ordonnée à l'origine
- cliquer sur variations du coefficient directeur

III Fonction carré

Définition

On appelle fonction carré la fonction $f : x \mapsto x^2$

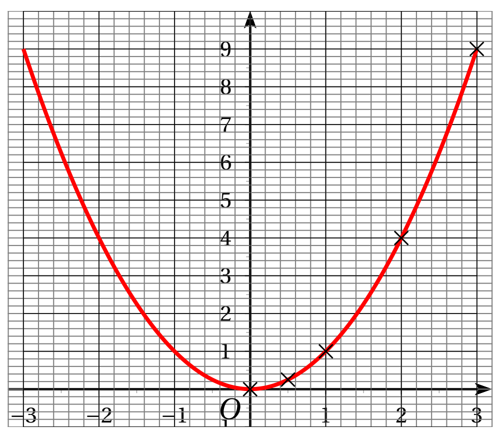
Propriétés

- L'ensemble de définition est $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
- La fonction est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et croissante sur $[0\,;\,+\infty[$
- La courbe représentative de f s'appelle une parabole et elle est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Pour tracer la courbe, on calcule des coordonnées de points. Comme la courbe est symétrique, on se limite à des valeurs positives et on construit les points symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

x	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$f(x) = x^2$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9

La courbe représentative de la fonction carré est appelée **parabole**.



Applications

Exercice : comparer les carrés des nombres suivants :

a) $0,2^2$ et $0,21^2$

b) $(-2,4)^2$ et $(-2,41)^2$

c) $(-3,1)^2$ et $4,2$

Solution :

a) 0,2 et 0,21 sont positifs ; sur $[0\,;\,+\infty[$, la fonction $f : x \mapsto x^2$ est croissante.
$0,2 < 0,21$ donc $f(0,2) < f(0,21)$ donc $\boxed{0,2^2 < 0,21^2}$

b) -2,4 et -2,41 sont négatifs ; sur $]-\infty\,;\,0]$, f est décroissante.
$-2,4 > -2,41$; comme f est décroissante, f renverse l'ordre, donc $\boxed{(-2,4)^2 < -2,41^2}$.

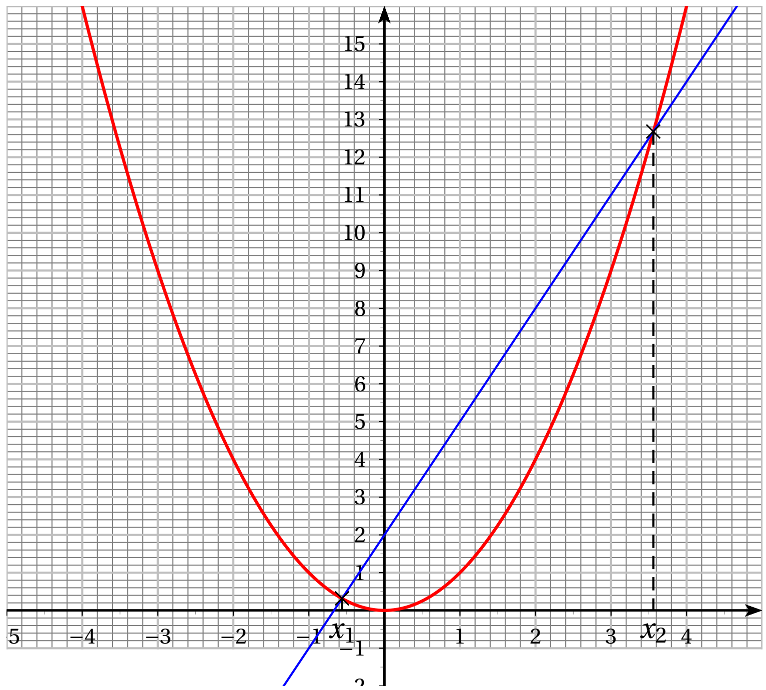
c) $(-3,1)^2 = 3,1^2$ donc il suffit de comparer $3,1^2$ et $4,2^2$.

3,1 et 4,2 sont positifs et $3,1 < 4,2$; sur $[0\,;\,+\infty[$, f est croissante, donc $3,1^2 < 4,2^2$, d'où $\boxed{(-3,1)^2 < 4,2^2}$

Exercice : résoudre graphiquement l'équation $x^2 = 3x+2$.
On pose $f(x) = x^2$ et $g(x) = 3x+2$.

On trace les courbes représentatives de ces fonctions. Les solutions éventuelles de cette équation sont les abscisses des points d'intersection de ces deux courbes.

Puisqu'il s'agit d'une lecture graphique, les valeurs trouvées sont des valeurs approchées des solutions. la méthode pour trouver les valeurs exactes sera vue en Première.



On trouve deux solutions : $x_1 \approx -0,5$ et $x_2 \approx 3,6$

Calcul de ces deux solutions : on résout l'équation $x^2 = 3x+2$.
L'équation s'écrit $x^2 - 3x - 2 = 0$, équation de second degré.
$\Delta = 17 > 0$; on a bien deux solutions.
$x_1 = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$

IV Fonction inverse

Définition

On appelle fonction inverse la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Propriété

La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$.

Propriété

$f : x \mapsto x^2$ est décroissante sur $]-\infty\,;\,0]$ et décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

Démonstration :

- Sur $[0\,;\,+\infty[$: soient deux réels x_1 et x_2 quelconques de $]0\,;\,+\infty[$ avec $0 \leqslant x_1 < x_2$.
  Il s'agit de comparer les nombres $f(x_1) = \dfrac{1}{x_1}$ et $f(x_2) = \dfrac{1}{x_2}$.
  $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}$.
  $x_1 - x_2 < 0$ car $x_1 < x_2$; $x_1 x_2 > 0$ comme produit de nombres positifs. Les images sont classées dans l'ordre inverse des antécédents, donc f est **décroissante** sur $]0\,;\,+\infty[$.

- Sur $]-\infty\,;\,0[$: soient deux réels x_1 et x_2 quelconques de $]-\infty\,;\,0[$ avec $\leqslant x_1 < x_2 < 0$.
  On a le mÍme calcul : $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}$.
  $x_1 - x_2 < 0$ car $x_1 < x_2$; $x_1 x_2 > 0$ comme produit de nombres négatifs. Les images sont classées dans l'ordre inverse des antécédents, donc f est **décroissante** sur $]-\infty\,;\,0[$.

Tableau de variation :

0 est une valeur interdite, donc il faut mettre une double-barre en dessous de 0.

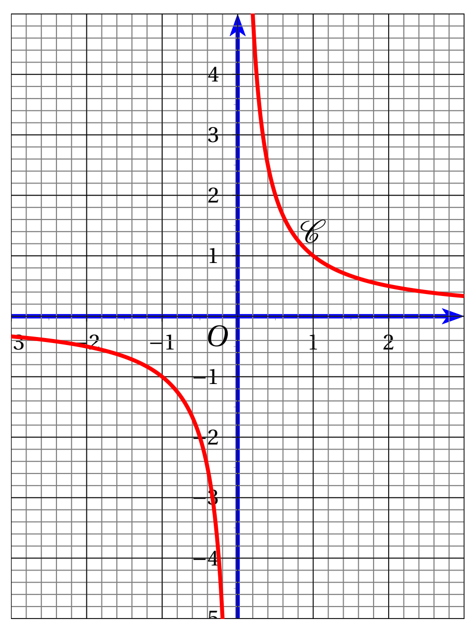
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$0 \searrow$	‖	$\searrow 0$

Courbe représentative

Pour tracer la courbe, on trace la partie correspondant à des abscisses positives en calculant les coordonnées de quelques points.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x) = \frac{1}{x}$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

La courbe représentative de la fonction inverse est appelée **hyperbole**. Elle est constituée de deux branches, symétriques par rapport à l'origine O.



Applications Exercice : comparer les nombres suivants :

a) $\dfrac{1}{0,2}$ et $\dfrac{1}{0,3}$

b) $-\dfrac{1}{2,4}$ et $-\dfrac{1}{2,5}$

c) $-\dfrac{1}{3,1}$ et $\dfrac{1}{4,2}$

Solutions :

a) 0,2 et 0,3 sont positifs ; sur $]0\ ;\ +\infty[$, la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante.

$0,2 < 0,3$ donc $f(0,2) > f(0,3)$ donc $\boxed{\dfrac{1}{0,2} > \dfrac{1}{0,3}}$

b) -2,4 et -2,5 sont négatifs ; sur $]-\infty\ ;\ 0[$, f est décroissante.

$-2,4 > -2,5$; comme f est décroissante, f renverse l'ordre, donc $\boxed{(-\dfrac{1}{2,4}) < -\dfrac{1}{2,5}}$.

c) $-3,1 < 0$ et $4,2 > 0$ donc $-\dfrac{1}{3,1} < 0$ et $\dfrac{1}{4,2} > 0$ donc $\boxed{-\dfrac{1}{3,1} < \dfrac{1}{4,2}}$.

Remarque : ici, on ne pouvait pas utiliser les variations de la fonction inverse, car les nombres -3,1 et 4,2 ne sont par dans les mêmes intervalles définition de la fonction inverse.

V Fonction racine carrée

Définition

- Soit x un réel positif. On appelle racine carrée de x, notée $\sqrt{x}$, le nombre positif dont le carré est x.
- On appelle fonction racine carrée la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$. Elle est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Propriété

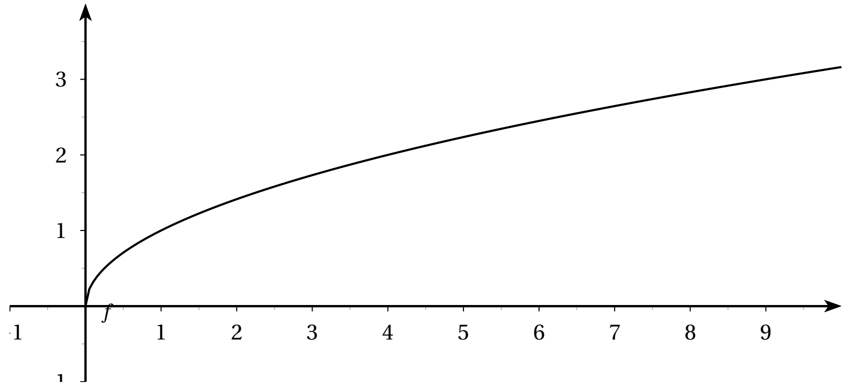
La fonction racine carrée est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

Démonstration :

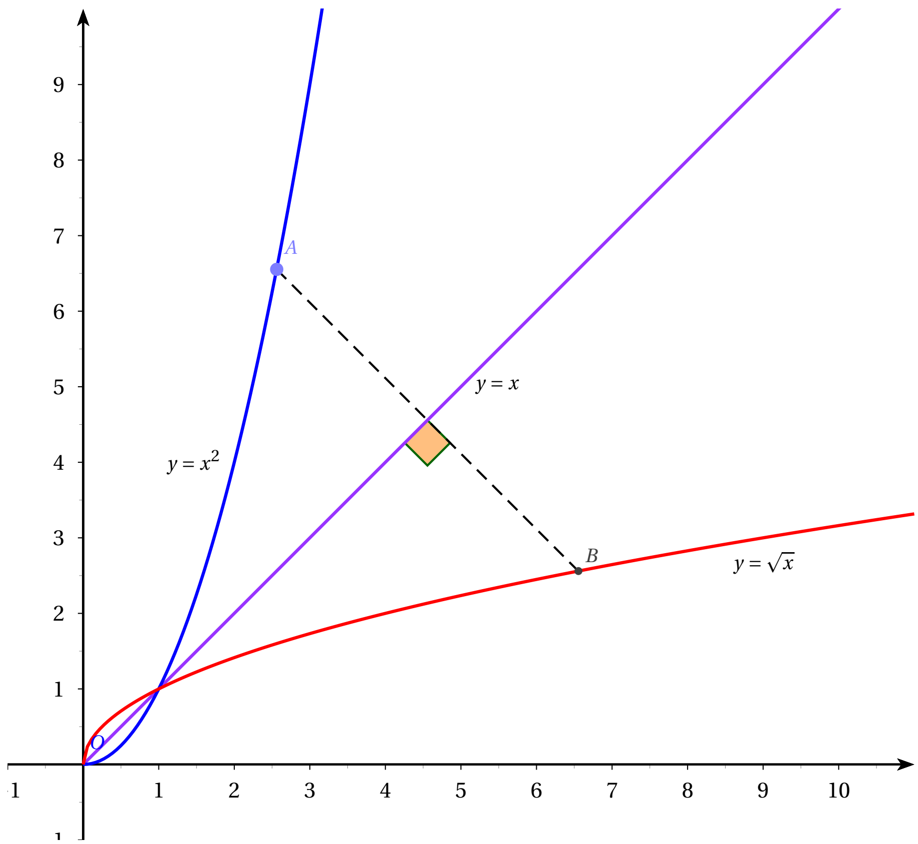
On prend deux nombres a et b quelconques de $[0\ ;\ +\infty[$ avec $a < b$.
Il s'agit de comparer $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$.
$b - a = \sqrt{b}^2 - \sqrt{a}^2 = \left(\sqrt{b} + \sqrt{a}\right)\left(\sqrt{b} - \sqrt{a}\right)$.
$b - a > 0$ et $\sqrt{b} + \sqrt{a} > 0$ donc $\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$.
Par conséquent : $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.
Les images sont classées dans le même ordre que les antécédents : la fonction est croissante.

Courbe représentative

La courbe représentative de la fonction racine carrée est une demi-parabole, d'axe (Ox).



Remarque : la courbe représentative de la fonction racine carrée est symétrique de la parabole associée à la fonction carré sur $[0\,;\, = \infty[$



Applications.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   (a) $\sqrt{x} = 5$
   (b) $\sqrt{x} \leqslant 5$
   (c) $\sqrt{x} > 5$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$:
   (a) $\sqrt{x} = -3$
   (b) $\sqrt{x} > -3$

VI Fonction cube

Définition

On appelle fonction cube la fonction $f : x \mapsto x^3$. Elle est définie sur $\mathbb{R}$.

Propriété

La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.

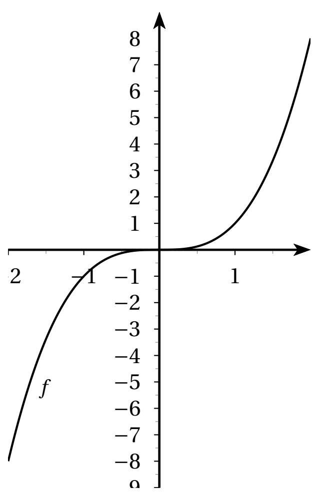
Démonstration :
On prend deux nombres a et b quelconques réels avec $a < b$.
Il s'agit de comparer a^3 et b^3.

- Si a est négatif et b positif, a^3 est négatif et b^3 est positif, donc $a^3 < b^3$
- On suppose a et b de même signe. Le produit ab est positif.

$a < b$	$a < b$	$a < b$	
En multipliant par a^2	En multipliant par ab	En multipliant par b^2	On en déduit $a^3 < b^3$.
$a^3 < a^2b$	$a^2b < ab^2 ab^2 < b^3$.		

Les images sont classées dans le même ordre que les antécédents : la fonction est croissante.

Courbe représentative
La courbe est représentative par rapport à l'origine.



Applications. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $x^3 = 8$
2. $x^3 \leqslant 8$
3. $x^3 > 8$