Suites numériques

Une suite numérique est une suite de nombres, illimitée et pouvant être numérotée.
Exemples :

- $0\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\cdots\,;$ (suite des entiers naturels)
- $0\,;\,2\,;\,4\,;\,6\,;\,8\,;\,10\,;\,12\,;\,14\cdots$ (suite des entiers pairs)
- $1\,;\,2\,;\,4\,;\,8\,;\,16\,;\,32\,;\,64\,;\,128\,;\,256\cdots$ (suite des puissances de 2)
- $1\,;\,1\,;\,2\,;\,3\,;\,5\,;\,8\,;\,13\,;\,21\,;\,34\,;\,55\,;\,89\,;\,144$ (suite de Fibonacci)

I Qu'est-ce qu'une suite numérique

1 Généralités

Définition :

Une suite numérique u est une fonction numérique, définie sur $\mathbb{N}$ ou sur une partie de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
$\mapsto u(n)$

Notation : Le terme général $u(n)$ se note u_n.
L'ensemble des termes de la suite se note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Attention à ne pas confondre les deux notations :

- u_n est le terme de rang n.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'ensemble des termes de la suite.

Exemples :

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2^n - 1$ pour tout n
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sqrt{n-4}$ pour tout $n \geqslant 4$.

Nous allons voir qu'il y a deux façons de définir une suite :

2 Définition explicite

Une suite est définie de façon explicite lorsque le terme général u_n est directement exprimé en fonction de n.
Exemple :
Soit (u_n) la suite définie par : $u_n = \dfrac{1}{n^2+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $u_0 = 1$; $u_1 = \dfrac{1}{2}$, $u_{10} = \dfrac{1}{101}$; $u_{50} = \dfrac{1}{2\,501}$.
On peut calculer facilement n'importe quel terme u_n ; il suffit de remplacer n par sa valeur.

3 Définition par récurrence :

Une suite (u_n) est définie par récurrence lorsque chaque terme est défini en fonction du ou des termes précédents, et par la donnée du ou des premiers termes.
Exemples :

- $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- **Suite de Fibonacci :**
  $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \end{cases}$.
- $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3 + u_n} \end{cases}$

  Calculer les trois premiers termes.
  Est-il facile de calculer le terme u_{25} ? u_{100} ? Le problème des suites définies par récurrence est que, pour pouvoir calculer un terme, il est nécessaire d'avoir calculé auparavant tous les termes précédents.

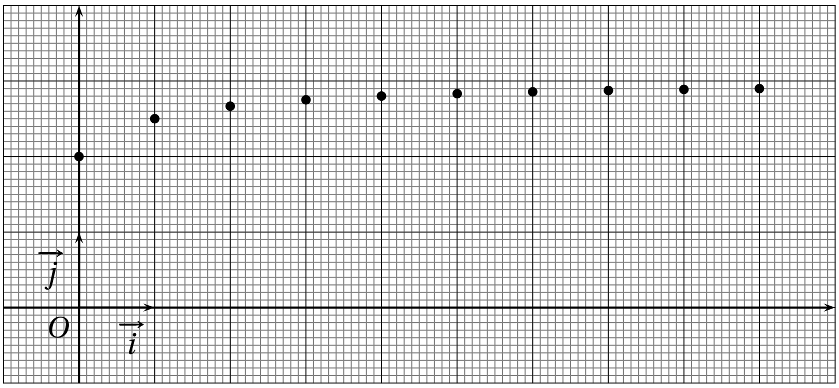
On essaye alors pour certains types de suites définies par récurrence de trouver une définition explicite, mais ce n'est pas toujours facile ou possible.

II Représentation graphique des termes d'une suite

1 Suite définie de façon explicite

On a $u_n = f(n)$ où f est une fonction.
On représente les points de coordonnées $(n\,;\, f(n))$.

Exemple : soit $u_n = 3 - \dfrac{1}{n+1}$.
La représentation des dix premiers termes de la suite (donc de u_0 à u_9) donne :



2 Suite définie par récurrence

On le fera plus tard en TD.

III Variations d'une suite

Définition :

a) **Suite croissante :** Une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est croissante si, et seulement si, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.

b) **Suite décroissante :** Une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est décroissante si, et seulement si, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

c) **Suite constante :** Une suite $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ est constante si, et seulement si, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_{n+1} = u_n$.

d) **Suite monotone** Une suite est monotone si elle est soit croissante, soit décroissante.

Remarque : En pratique, on calcule $u_{n+1} - u_n$ pour tout n et on étudie le signe de cette différence.

Exemples :

Exemple 1 Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = n^2+1$. Montrons que cette suite est croissante.
Pour tout n : $u_{n+1} = (n+1)^2+1$; $u_n = n^2+1$.
Alors $u_{n+1} - u_n = [(n+1)^2+1] - [n^2+1] = (n+1)^2 - n^2 = \boxed{2n+1}$.
Comme n est un entier naturel, $2n+1$ est positif, donc $u_{n+1} - u_n$ est positif.
Par conséquent : $u_{n+1} > u_n$ pour tout n : $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est croissante}}$.

Exemple 2 Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. Montrons que cette suite est décroissante.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+2}$; $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.
$u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1(n+1) - 1(n+1)}{(n+2)(n+1)} = -\dfrac{1}{(n+1)(n+2)} < 0$ car le dénominateur est positif (n étant un entier naturel) et -1 étant négatif.
Par conséquent : $u_{n+1} - u_n < 0$; on en déduit que $u_{n+1} < u_n$ pour tout n.
$\boxed{\text{La suite } (u_n) \text{ est décroissante.}}$