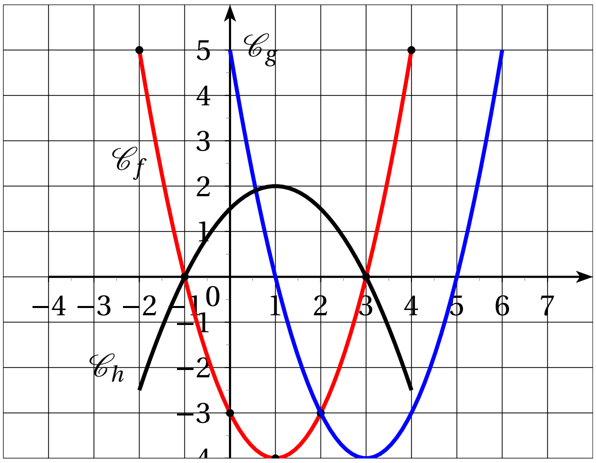
Correction du contrôle

I

$g(x) = f(x+2) = f(x-(-2)) = f(x-a)$ avec $a = -2$ donc $\mathscr{C}_g$ s'obtient à partir de $\mathscr{C}_f$ par la translation de vecteur $2\,\vec{i}$.

$h(x) = -\dfrac{1}{2}f(x)$ donc on multiplie toutes les ordonnées par -0,5.

On obtient les courbes ci-dessous.



II

a) Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-3x-10}$. Pour que cette fonction soit définie, le dénominateur ne doit pas être nul.
On cherche donc les valeurs qui annulent celui-ci.
C'est un trinôme du second degré de la forme ax^2+bx+c. $\Delta = 49 > 0$. Il y a donc deux racines :
$x_1 = \dfrac{3-\sqrt{49}}{2} = -2$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{49}}{2} = 5$.
L'ensemble de définition de f est : $\boxed{\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\,;\,5\}}$

b) Soit $g : x \mapsto \sqrt{x+5}$. $g(x)$ existe si, et seulement si, $x+5 \geqslant 0$.
$x+5 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -5$ donc l'ensemble de définition de g est : $\boxed{\mathscr{D}_g = [-5\,;\,=\infty[}$.

c) Soit $h : x \mapsto \dfrac{1}{(x+2)(x-3)(x-7)}$.
$h(x)$ est une fraction rationnelle; il faut excure les valeurs qui annulent le dénominateur. Ce sont de manière évidente les nombres -2, 3 et 7.
L'ensemble de définition de h est :
$\boxed{\mathscr{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{-2\,;\,3\,;\,7\}}$.

III

Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} - 3x - 12$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

$f = u + v$ avec $u(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v(x) = -3x - 12$.

u est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$; v aussi (fonction affine, dont le coefficient directeur, -3, est négatif).

On en déduit que f est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$ comme somme de deux fonctions décroissantes.

IV

$f(x) = x+3$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$.

- $f \circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\dfrac{1}{x^2+1}\right) = f(y) = y+3$
$= \dfrac{1}{x^2+1} + 3$ avec $y = \dfrac{1}{x^2+1}$.
- $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x+3) = g(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$
$= \dfrac{1}{(x+3)^2+1}$ avec $z = x+3$.

Par conséquent :

$\boxed{f \circ g(x) = \dfrac{1}{x^2+1} + 3}$ et $\boxed{g \circ f(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2+1}}$

V

$f(x) = (x+3)^2 - 5$. On veut écrire f comme la composée d'une fonction g suivie d'une fonction h.

Il y a deux façons :

- $f : x \xrightarrow{g} (x+3)^2 \xrightarrow{h} (x+3)^2 - 5$; $f = h \circ g$ avec $g(x) = (x+3)^2$ et $h(x) = x - 5$.
- $f : x \xrightarrow{g} (x+3) \xrightarrow{h} (x+3)^2 - 5$; $f = h \circ g$ avec $g(x) = (x+3)$ et $h(x) = x^2 - 5$.

VI

1. Il y a plusieurs façons de trouver.
Par exemple, la parabole $\mathscr{C}_3$ est tournée vers le haut, donc la fonction associée est du type $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a > 0$; seule la fonction g convient.
On peut aussi regarder les différentes images de 0 : on trouve $f(0) = 1$, $g(0) = -2$ et $h(0) = 5$.
On en déduit :

Courbe	$\mathscr{C}_1$	$\mathscr{C}_2$	$\mathscr{C}_3$
Fonction associée	f	h	g

2. On cherche les abscisses exactes des points d'intersection de $\mathscr{C}_1$ avec l'axe des abscisses; ce sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$.
$f(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 3x + 1 = 0$.
$\Delta = 3^2 - 4 \times (-2) \times 1 = 17 > 0$. Il y a deux solutions.
$x_1 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{-4} = \dfrac{3-\sqrt{17}}{4}$ et $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{17}}{4}$.
$\mathscr{C}_1$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses $\dfrac{3-\sqrt{17}}{4}$ et $\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}$.