Correction du contrôle sur les inéquations du second degré

I

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $x^2 + 8x + 15 < 0$

$\Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times 15 = 4 > 0$. Il y a deux racines : $x_1 = \dfrac{-8-\sqrt{4}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-8+\sqrt{4}}{2} = -3$.

Le trinôme du second degré est négatif, c'est-à-dire du signe opposé à celui du coefficient de x^2, entre les racines.

$\boxed{\mathscr{S} =]-5\,;\,-3[}$

b) $(-2x-3)(x+4) \geqslant 0$ L'expression est déjà factorisée ; les deux racines sont évidentes et sont $x_1 = -4$ et $x_2 = -\dfrac{3}{2}$.

Le coefficient de x^2 est -2 (car en développant l'expression, on trouve $-2x^2 + \cdots$) ; celle-ci est donc positive entre les racines (di signe opposé au coefficient de x^2 qui est -2).

Par conséquent : $\boxed{\mathscr{S} = \left[-4 - \dfrac{3}{2}\right]}$

c) $7x^2 + 2x + 5 > 0$ $\Delta = 2^2 - 4 \times 7 \times 5 = -136 < 0$.

Le discriminant est négatif donc le trinôme du second degré $7x^2 + 2x + 5$ est du signe de 7 (donc positif) pour tout x.

Par conséquent : $\boxed{\mathscr{S} = \mathbb{R}}$

d) $x^2 + 1 \geqslant 0$ Pour tout x, $x^2 \geqslant 0$ donc $x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$. L'inégalité est vérifiée pour tout x : $\boxed{\mathscr{S} = \mathbb{R}}$

e) $x^2 + 10x + 25 > 0$ On remarque une identité remarquable, $(x+5)^2$. L'inéquation s'écrit donc : $(x+5)^2 > 0$.

$(x+5)^2 \geqslant 0$ pour tout x et s'annule pour $x = -5$; il faut donc exclure -5.

$\boxed{\mathscr{S} = \mathbb{R} \setminus \{-5\}}$

f) $x(2x+5) < 3$ On développe et on transpose tout du même côté ; on obtient : $2x^2 + 5x < 3$ puis $2x^2 + 5x - 3 < 0$.

$\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49 > 0$.

Le trinôme a donc deux racines : $x_1 = \dfrac{-5-\sqrt{49}}{2 \times 2} = -3$ et

$x_2 = \dfrac{-5+\sqrt{49}}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Le coefficient de x^2 est 2 qui est positif ; $2x^2 + 5x - 3$ est donc négatif (du signe opposé à celui de 2) quand x est entre les racines.

$\boxed{\mathscr{S} = \left]-3\,;\,\dfrac{1}{2}\right[}$

II

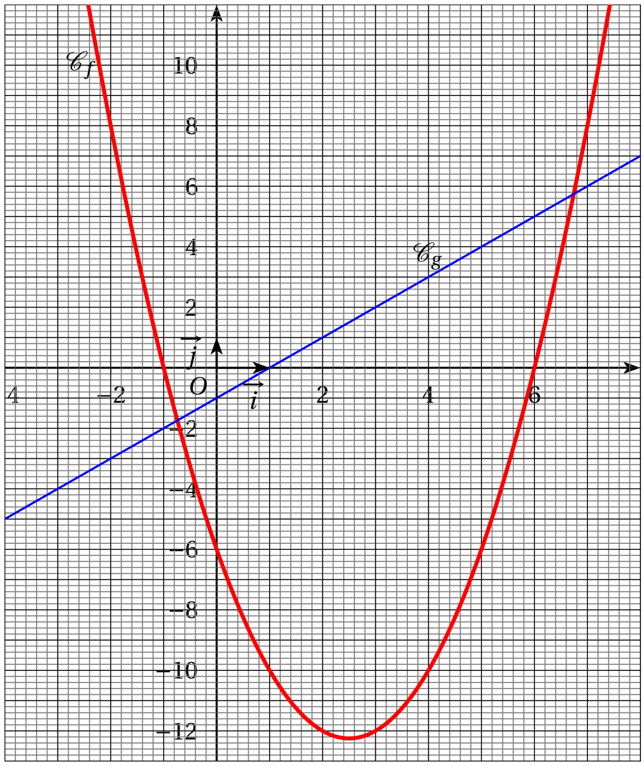
On veut résoudre l'inéquation $x \geqslant \dfrac{1}{x}$.

1. L'ensemble de définition est : $\mathscr{D} = \mathbb{R}^*$. (car la fraction $\dfrac{1}{x}$ existe si, et seulement si, $x \neq 0$)
2. On suppose que x appartient à $\mathscr{D}$.
   L'inéquation est équivalente à $x - \dfrac{1}{x} \geqslant 0$ qui équivaut à $\dfrac{x^2-1}{x} \geqslant 0$ (en mettant au même dénominateur)
3. Signe de $x^2 - 1$:
   $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$; les deux racines sont -1 et 1. Le coefficient de x^2 est 1 (positif). On en déduit que $x^2 - 1$ est positif pour x à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines, c'est-à-dire pour $x \in]-\infty\,;\,-1] \cup [1\,;\,+\infty[$.
   $x^2 - 1$ est négatif pour $x \in [-1\,;\,1]$.
4. Cherchons le signe de $\dfrac{x^2-1}{x}$ à l'aide d'un tableau de signes.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
Signe de x^2-1		$+$	0	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	
Signe de x		$-$	$\vert$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$	
Signe de $\dfrac{x^2-1}{x}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

5. L'ensemble des solutions de l'inéquation $x \geqslant \dfrac{1}{x}$ est : $\boxed{\mathscr{S} = [-1\,;\,0[\cup[1\,;\,+\infty[}$

III



Ci-dessus sont représentés deux fonctions :
$f : x \mapsto x^2 - 5x - 6$ et $g : x \mapsto x - 1$, de courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

1. Les deux courbes semblent avoir deux points d'intersection, dont les abscisses sont $x_1 \approx -0,7$ et $x_2 \approx 6,8$.
2. Les abscisses des points d'intersection de ces deux courbes sont solutions de l'équation $f(x) = g(x)$..
   $f(x) = g(x)$ s'écrit $x^2 - 5x - 6 = x - 1$ qui équivaut à $x^2 - 6x - 5 = 0$.
   $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 56 > 0$. Δ est strictement positif, donc l'équation a deux solutions :
   $x_1 = \dfrac{-(-6)-\sqrt{56}}{2} = \dfrac{6-2\sqrt{14}}{2} = \dfrac{2(3-\sqrt{14})}{2} = 3 - \sqrt{14}$ et $x_2 = 3 + \sqrt{14}$.
3. Les points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et de $\mathscr{C}_g$ sont bien deux ; les abscisses exactes de leurs points d'intersection sont $3 - \sqrt{14}$ et $3 + \sqrt{14}$ (dont les valeurs approchées correspondent aux valeurs trouvées à la première question).
4. Les points pour lesquels $\mathscr{C}_f$ est en dessous de $\mathscr{C}$ ont des abscisses x qui vérifient $f(x) \leqslant g(x)$, qui équivaut à $x^2 - 6x - 5 \leqslant 0$.
   Ce trinôme est négatif, donc du signe opposé à celui du coefficient de x^2 entre les racines, c'est-à-dire pour $x \in [3 - \sqrt{14}\,;\,3 + \sqrt{14}]$ (ce qui est confirmé par le graphique.)