Correction du devoir

I

a) Soit l'équation $6x^2+39x-21=0$.
En simplifiant par 3, on obtient $2x^2+13x-7=0$ $\Delta=13^2-4\times2\times(-7)=225>0$.
L'équation a deux solutions : $x_1=\dfrac{-13-\sqrt{225}}{4}=\dfrac{-13-15}{4}=-7$ et $x_2=\dfrac{-13+15}{4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$.
$\boxed{\mathscr{S}=\left\{-7\,;\,\dfrac{1}{2}\right\}}$

b) Soit l'équation $5x^2+7x+10=0$.
$\Delta=7^2-4\times5\times10=49-200<0$ donc **l'équation n'a aucune solution.** $\boxed{\mathscr{S}=\emptyset}$

c) Soit l'équation $3x^2+18x+27=0$. On peut simplifier par 3. L'équation devient : $x^2+6x+9=0$. On reconnaît une identité remarquable.
L'équation s'écrit : $(x+3)^2=0$ et a pour solution $x=-3$. $\boxed{\mathscr{S}=\{-3\}}$.

II

1. Soit l'équation $10x^2+85x+105=0$. Elle se simplifie en $2x^2+17x+21=0$
$\Delta=17^2-4\times2\times21=289-168=121>0$.
L'équation a deux solutions : $x_1=\dfrac{-17-\sqrt{121}}{4}=\dfrac{-28}{4}=-7$ et $x_2=\dfrac{-17+11}{4}=-\dfrac{3}{2}$.
$\boxed{\mathscr{S}=\left\{-7\,;\,-\dfrac{3}{2}\right\}}$.
2. x_1 et x_2 sont donc racines du trinôme $10x^2+85x+105$.
Celui se factorise donc en $10(x-x_1)(x-x_2)$.
Par conséquent : $10x^2+85x+105=10\,(x-(-7))\left(x-\left(-\dfrac{3}{2}\right)\right)=10(x+7)\left(x+\dfrac{3}{2}\right)=\boxed{(x+7)(10x+15)}$

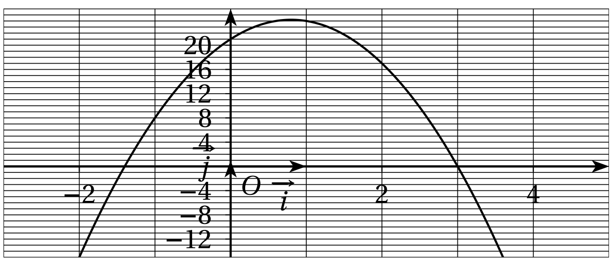
III

1. L'aire totale du grand terrain est égale à celle du carré plus celle du terrain hachuré ; l'aire du carré vaut x^2 et celle du terrain hachuré 999.
L'aire du grand terrain est celle d'un rectangle, de longueur $2x$ et de largeur $x+5$: son aire vaut $2x(x+5)$.
Par conséquent : $\boxed{x^2+999=2x(x+5)}$.
2. Cette équation s'écrit, en développant : $x^2+999=2x^2+10x$ d'où $0=x^2+10x-999=0$ c'est-à-dire $x^2+10x-999=0$.
C'est une équation du second degré. $\Delta=10^2-4\times1\times(-999)=100+4\times999=4096>0$.
Elle admet deux solutions : $x_1=\dfrac{-10-\sqrt{4096}}{2}=\dfrac{-10-64}{2}=-37$ et $x_2=\dfrac{-10+64}{2}=27$.
$x_1=-37$ ne convient pas, car x représente une longueur, donc doit être un nombre positif.
Par conséquent, le côté du carré mesure 27 m.
3. L'aire du carré vaut alors $27^2=729<1500$ donc il ne pouvait pas construire sur son terrain carré initial.

IV

On considère l'inéquation $-5x^2+8x+21\leqslant0$.

1.



Léa semble s'être trompée; $f(x)$ serait plutôt positif sur l'intervalle $[-1,4\,;\,3]$.

2. Résolvons l'inéquation.
C'est une inéquation du second degré. $\Delta = 8^2 - 4\times(-5)\times 21 = 64+420 = 484 > 0$.
L'expression a deux racines : $x_1 = \dfrac{-8+\sqrt{484}}{2\times(-5)} = \dfrac{-8+22}{-10} = \dfrac{-14}{10} = -1,4$ et $x_2 = \dfrac{-8-22}{-10} = 3$.
L'expression $-5x^2+8x+21$ est négative (du signe de -5) à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines, donc l'ensemble des solutions de cette inéquation est :
$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty\,;\,-1,4]\cup]3\,;\,+\infty[}$. Léa s'est bien trompée.

V

Le coût de production est $C(q) = q^3-4q^2+6q+81$ (en centaines d'euros) pour q) centaines d'objets produits.

1. (a) D'après le graphique, le coût de production semble positif sur $[0\,;\,+\infty[$.
   (b) $(q+3)(q^2-7q+27) = q^3-7q^2+27q+3q^2-21q+81 = q^3-4q^2+6q+81 = C(q)$ donc $\boxed{C(q) = (q+3)(q^2-7q+27)}$.
   Pour étudier le signe de cette expression on étudie le signe de chaque facteur.
   - Signe de $q+3$: Sur $]0\,;\,+\infty[$, $q+3>0$ (somme de nombres positifs)
   - Signe de $q^2-7q+27$. C'est un trinôme du second degré. $\Delta = (-7)^2-4\times1\times27 = 9-108 = -81 < 0$.
     $\Delta < 0$ donc $q^2-7q+27$ est du signe du coefficient de q^2 qui vaut 1, donc positif, pour tout $q \geqslant 0$.

   Sur $[0\,;\,+\infty[$, $q+3$ et $q^2-7q+27$ sont positifs donc leur produit aussi.
   $\boxed{\text{On en déduit que } C(q) \text{ est strictement positif sur } [0\,;\,+\infty[.}$
2. La production n'est rentable que si le coût total est inférieur à 38 500 €.
   (a) 38 500 €correspondent à 285 centaines d'euros. Graphiquement, $C(q) \leqslant 385$ pour $q \leqslant 8$ environ.
   (b) $C(q) \leqslant 385 \Leftrightarrow q^3-4q^2+6q+81 \leqslant 385 \Leftrightarrow q^3-4q^2+6q-304 \leqslant 0$.
   $(q-8)(q^2+4q+38) = q^3+4q^2+38q-8q^2-32q-304 = q^3-4q^2+6q-304$.
   On en déduit que l'inéquation $q^3-4q^2+6q-304 \leqslant 0$ s'écrit $\mathbf{(q-8)(q^2+4q+38) \leqslant 0}$.
   On étudie le signe de chaque facteur de $(q-8)(q^2+4q+38)$.
   - Signe de $q-8$: $q-8<0 \Leftrightarrow q<8$; $q-8=0 \Leftrightarrow q=8$ et $q-8>0 \Leftrightarrow q>8$.
   - Signe de $q^2+4q+38$: c'est une expression du second degré
     $\Delta = 4^2-4\times1\times38 = 16-144 = -128 < 0$. Comme $\Delta < 0$, l'expression est du signe du coefficient de q^2, donc positive, pour tout q.

   Récapitulons dans un tableau de signes :

q	0 8 $+\infty$
Signe de $q-8$	$-$ 0 $+$
Signe de $q^2+4q+38$	$+$ $+$
Signe du produit	$-$ 0 $+$

   $\boxed{\text{Cette entreprise est rentable pour une production comprise entre 0 et 800 objets.}}$

Remarque : Il faut bien faire le lien dans la première question entre le produit factorisé et $C(q)$; de même dans la seconde question, il faut faire le lien entre l'étude du signe de l'expression factorisée et l'étude de la rentabilité !