

# Résumé sur les fonctions du second degré

## I Fonction carré $x \mapsto x^2$

### I.1 Définition



#### Définition

On appelle fonction carré la fonction  $x \mapsto x^2$ .  
La fonction carré  $x \mapsto x^2$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .  
En effet, on peut calculer  $x^2$  pour n'importe quelle valeur de  $x \in \mathbb{R}$ .

### I.2 Parité



#### Définition

Une fonction  $f$  définie sur un ensemble  $I$  est paire si :

- $I$  est symétrique par rapport à l'origine  $O$  du repère (donc, pour tout  $x \in I$ ,  $-x \in I$ ).
- pour tout  $x \in I$ ,  $f(-x) = f(x)$

**Conséquence graphique :** la courbe représentative de cette fonction est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



#### Propriété

La fonction carré  $f : x \mapsto x^2$  est paire

#### Démonstration

- $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}$  est symétrique par rapport à  $O$ .
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

### I.3 Variations



#### Propriété

$f : x \mapsto x^2$  est décroissante sur  $] -\infty ; 0]$  et croissante sur  $[0 ; +\infty[$ .

#### Démonstration :

- Sur  $[0 ; +\infty[$  : soient deux réels  $x_1$  et  $x_2$  quelconques de  $[0 ; +\infty[$  avec  $0 \leq x_1 < x_2$ .  
Il s'agit de comparer les nombres  $f(x_1) = x_1^2$  et  $f(x_2) = x_2^2$ .  
 $f(x_2) - f(x_1) = x_2^2 - x_1^2 = \underbrace{(x_2 + x_1)}_{\geq 0} \times \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} \geq 0$  donc  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .

En effet,  $x_2 + x_1 \geq 0$  comme somme de nombres positifs et  $x_2 - x_1 > 0$  car on a supposé  $x_1 < x_2$ .  
 Les images sont classées dans le même ordre que les antécédents, donc  $f$  est croissante sur  $[0; +\infty[$ .

- Sur  $] -\infty; 0]$  : soient deux réels  $x_1$  et  $x_2$  quelconques de  $] -\infty; 0]$  avec  $x_1 < x_2 \leq 0$ .  
 On a le même calcul :  $f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{(x_2 + x_1)}_{\leq 0} \times \underbrace{(x_2 - x_1)}_{> 0} \leq 0$  ( $x_1 + x_2 \leq 0$ ) car les deux nombres sont négatifs.

Les images cette fois sont classées dans l'ordre inverse des antécédents : la fonction est décroissante.

**Remarque** : sur  $] -\infty; 0]$ , on aurait pu utiliser la parité de la fonction et la symétrie de la courbe par rapport à l'axe des ordonnées.

**Tableau de variation :**

|        |           |     |           |
|--------|-----------|-----|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $0$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ |           |     |           |

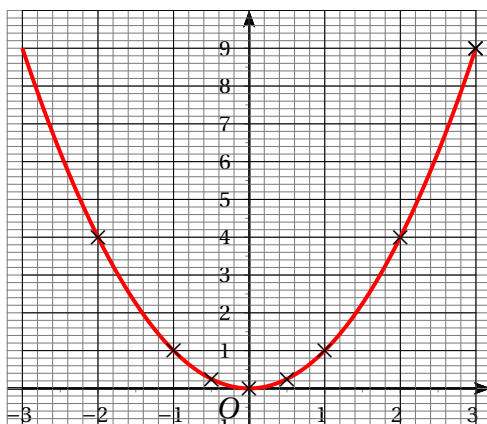
**I.4 Courbe représentative**

Pour tracer la courbe, on calcule des coordonnées de points (il en faut plus que deux, puisque la courbe n'est pas une droite). Comme la courbe est symétrique, on se limite à des points dont les abscisses sont des valeurs positives et on construit ensuite les points symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

En général, on prend ces cinq valeurs positives :

|              |   |               |   |   |   |
|--------------|---|---------------|---|---|---|
| $x$          | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 3 |
| $f(x) = x^2$ | 0 | $\frac{1}{4}$ | 1 | 4 | 9 |

La courbe représentative de la fonction carré est appelée **parabole**.

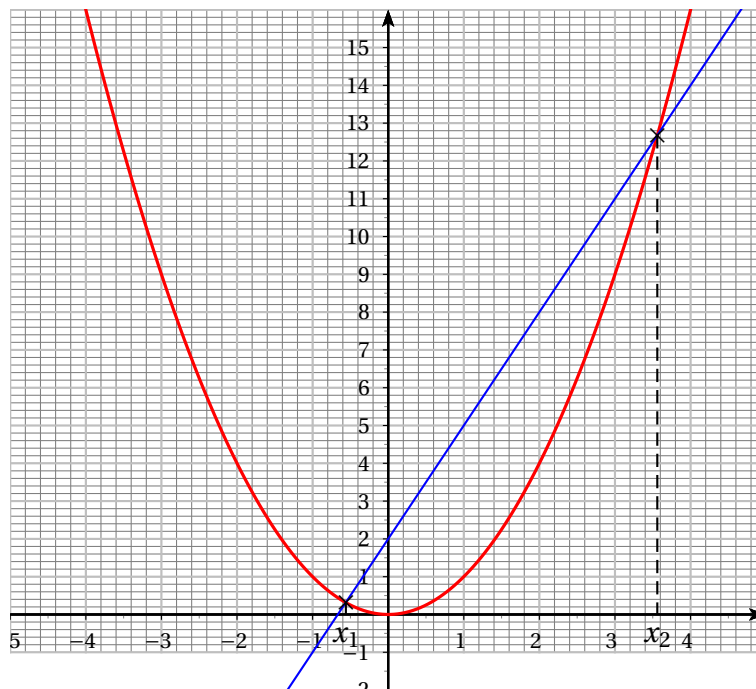


**Exercice** : résoudre graphiquement puis algébriquement l'équation  $x^2 = 3x + 2$ .  
 On pose  $f(x) = x^2$  et  $g(x) = 3x + 2$ .

1. **Graphiquement** :

On trace les courbes représentatives de ces fonctions. Les solutions éventuelles de cette équation sont les abscisses des points d'intersection de ces deux courbes.

Puisqu'il s'agit d'une lecture graphique, les valeurs trouvées sont des valeurs approchées des solutions.



On trouve deux solutions :  $x_1 \approx -0,5$  et  $x_2 \approx 3,6$ .

2. **Algébriquement** : on résout l'équation  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = 3x + 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 2 = 0$ .

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 + 8 = 17 > 0.$$

Puisque  $\Delta > 0$ , l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{17}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{3 + \sqrt{17}}{2}$$

## II Fonction polynôme du second degré

### II.1 Définitions

#### Définition

On appelle fonction **polynôme du second degré** toute fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où  $a, b$  et  $c$  sont des réels appelés coefficients avec  $a \neq 0$ .

**Exemples** : Exemples de fonctions polynômes du second degré

| fonctions polynôme de degré 2 | coefficients           |
|-------------------------------|------------------------|
| $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$        | $a = 2, b = -5, c = 3$ |
| $f(x) = -x^2 + 3$             | $a = -1, b = 0, c = 3$ |
| $f(x) = -7x^2 + 3x$           | $a = -7, b = 3, c = 0$ |

## Définition

L'expression  $f(x) = ax^2 + bx + c$  peut s'écrire sous la forme  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$  avec  $\alpha = -\frac{b}{2a}$  et  $\beta = f(\alpha)$ .  
Cette forme est appelée **forme canonique**

### Démonstration :

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right] + c = a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = \boxed{a(x - \alpha)^2 + \beta} \text{ en posant } \alpha = -\frac{b}{2a}; \text{ on a alors } \beta = -\frac{b^2}{4a} + c = f(\alpha), \text{ car en remplaçant } x \text{ par } \alpha \text{ dans } f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta, \text{ on trouve } \beta.$$

### Exemples :

1. Soit  $P(x) = 2x^2 - 4x + 5 = ax^2 + bx + c$  avec  $a = 2$ ,  $b = -4$  et  $c = 5$ .

$$\text{On a } \alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \times 2} = 1$$

$$\beta = P(\alpha) = P(1) = 3$$

$$\text{Par conséquent } P(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta = 2(x - 1)^2 + 3.$$

2.  $P(x) = -5x^2 + 2x - 7 = ax^2 + bx + c$  avec  $a = -5$ ,  $b = 2$  et  $c = -7$ .

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2 \times (-5)} = \frac{1}{5}$$

$$\beta = P(\alpha) = P\left(\frac{1}{5}\right) = -5 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{5} - 7 = -\frac{34}{5}.$$

$$\text{On en déduit } P(x) = -5\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{34}{5}$$

## II.2 Variations et représentation graphique

### Propriété

La fonction polynôme de degré 2 définie sur  $\mathbb{R}$  est :

- ♦ strictement décroissante sur  $] -\infty ; \alpha ]$  puis strictement croissante sur  $[\alpha ; +\infty[$  **si**  $a > 0$ ,
- ♦ strictement croissante sur  $] -\infty ; \alpha ]$  puis strictement décroissante  $[\alpha ; +\infty[$  **si**  $a < 0$ ,

**Démonstration dans le cas  $a > 0$  :** Sur  $[\alpha ; +\infty[$  :

On prend deux nombres  $x_1$  et  $x_2$  avec  $\alpha \leq x_1 \leq x_2$ .

$$\alpha \leq x_1 \leq x_2 \Rightarrow 0 \leq x_1 - \alpha \leq x_2 - \alpha \Rightarrow 0 \leq (x_1 - \alpha)^2 \leq (x_2 - \alpha)^2 \text{ (car la fonction carré est croissante sur } [0 ; +\infty[)$$

$$\text{On en déduit } 0 \leq 0 \leq a(x_1 - \alpha)^2 \leq a(x_2 - \alpha)^2 \text{ puis } \beta \leq a(x_1 - \alpha)^2 + \beta \leq a(x_2 - \alpha)^2 + \beta.$$

Les images sont classées dans le même ordre que les antécédents, donc la fonction  $f$  est croissante sur  $[\alpha ; +\infty[$ .

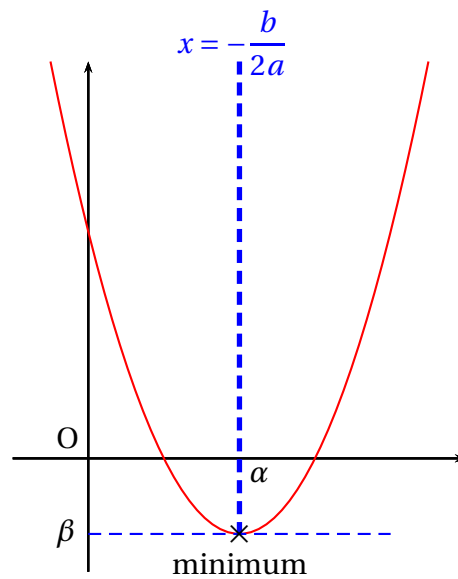
**Démonstration analogue** sur  $] -\infty ; \alpha ]$  et dans le cas où  $a < 0$

## Tableau de variations et représentation graphique :

**$a > 0$**

|        |           |                 |           |
|--------|-----------|-----------------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-\frac{b}{2a}$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $+\infty$ | $\beta$         | $+\infty$ |

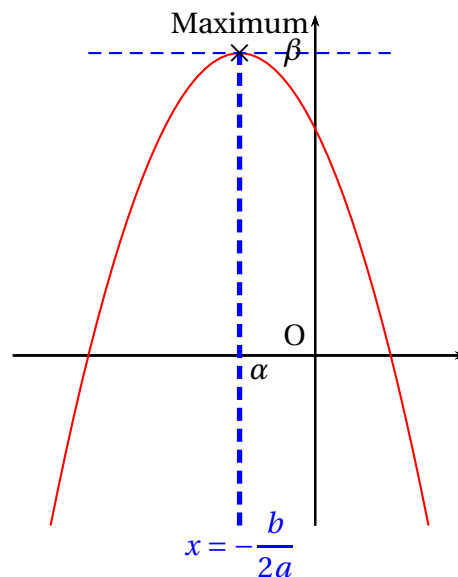
Le sommet S a pour coordonner  $(\alpha ; \beta)$



**$a < 0$**

|        |           |                 |           |
|--------|-----------|-----------------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $-\frac{b}{2a}$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\beta$         | $-\infty$ |

Le sommet S a pour coordonner  $(\alpha ; \beta)$



Dans un repère  $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$ , la courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2 est une **parabole**. Cette parabole admet un **axe de symétrie** parallèle à l'axe des ordonnées.

**Remarque :** pour calculer  $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$ , on effectue plusieurs transformations successives :

$$x \mapsto (x - \alpha)^2 \mapsto a(x - \alpha)^2 \mapsto a(x - \alpha)^2 + \beta.$$

La première transformation correspond à une translation parallèlement à l'axe des abscisses de  $\alpha$  unités; la deuxième, multiplication par  $a$ , correspond à une dilatation (et un renversement si  $a < 0$ ) et la troisième à une translation parallèlement à l'axe des ordonnées de  $\beta$  unités.