Équations et inéquations du second degré

Table des matières

I Quelques exemples préliminaires 1
II Résolution de l'équation $\mathbf{ax^2+bx+c=0}$ 2
III Signe de l'expression $\mathbf{ax^2+bx+c}$ 4
IV Exercices d'entraînement 5

I Quelques exemples préliminaires

1. Résoudre l'équation $x^2-36=0$.
   $x^2-36=0$ s'écrit $x^2-6^2=0$ soit $(x+6)(x-6)=0$.
   Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul. L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S}=\{-6\ ;\ 6\}}$.
2. Résoudre l'équation $x^2-7=0$.
   $x^2-36=0$ s'écrit $x^2-\sqrt{7}^2=0$ soit $(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})=0$.
   L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S}=\{-\sqrt{7}\ ;\ \sqrt{7}\}}$.
3. Résoudre l'équation : $x^2+5=0$.
   Pour tout x, $x^2\geqslant 0$ donc $x^2+5\geqslant 5$ et ne peut s'annuler : l'équation n'a pas de solution. $\boxed{\mathscr{S}=\emptyset}$.
4. Soit l'équation $x^2+5x+6=0$.
   Tu as vu en classe de seconde la **forme canonique** d'un trinôme du second degré :
   $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $\alpha=-\dfrac{b}{2a}$ et $\beta=f(\alpha)$ avec $f(x)=ax^2+bx+c$.
   Ici : $a=1$, $b=5$ et $c=6$ donc $\alpha=-\dfrac{5}{2}$ et $\beta=\left(-\dfrac{5}{2}\right)^2+5\times\left(-\dfrac{5}{2}\right)+6=\dfrac{25}{4}-\dfrac{25}{2}+6=-\dfrac{1}{4}$.
   Par conséquent : $x^2+5x+6=\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$.
   On peut alors résoudre l'équation :
   $x^2+5x+6=0\Leftrightarrow\left(x+\dfrac{5}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}=0$ et on factorise avec la troisième identité remarquable :
   On en déduit : $\left[\left(x+\dfrac{5}{2}\right)+\dfrac{1}{2}\right]\left[\left(x+\dfrac{5}{2}\right)-\dfrac{1}{2}\right]=0\Leftrightarrow(x+3)(x+2)=0$.
   L'ensemble des solutions est : $\boxed{\mathscr{S}=\{-3\ ;\ -2\}}$.
5. Soit l'équation $x^2+6x+9=0$.
   $x^2=6x+9=x^2+1\times x\times 3+3^2$ donc on reconnaît une identité remarquable : $x^2=6x+9=(x+3)^2$.
   L'équation s'écrit : $(x+3)^2=0$ qui a pour solution $\boxed{\mathscr{S}=\{-3\}}$.

6. Soit l'équation $x^2 - 3x + 11 = 0$.
On utilise le même procédé :
En utilisant la forme canonique, l'équation s'écrit :
$\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{35}{4} = 0$ Cette équation n'a pas de solution, car $\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{35}{4} > 0$ (somme d'un nombre supérieur ou égal à 0 avec un nombre strictement positif).
Par conséquent : $\boxed{\mathscr{S} = \emptyset}$

On constate sur quelques exemples qu'une équation du type $ax^2 + bx + c = 0$ peut avoir deux solutions, une solution ou aucune.

On va voir dans la suite comment savoir le nombre de solutions et comment les calculer directement, sans passer par la forme canonique à chaque fois.

II Résolution de l'équation $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$

Définition

On appelle équation du second degré toute équation du type $ax^2 + bx + c = 0$, où a, b et c sont des réels donnés, avec $a \neq 0$

Pour étudier cette équation, on transforme l'expression $ax^2 + bx + c$ en utilisant la forme canonique.
$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$ avec $f(x) = ax^2 + bx + c$.
On trouve : $f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \times \left(-\frac{b}{2a}\right) + c = a \times \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{-b^2 + 4ac}{4a}$.
On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. (qu'on apelle discriminant).
On en déduit :
$ax^2 + bx + c = \boxed{a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]}$.

L'équation s'écrit : $a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0$.
Remarque : puisque $a \neq 0$, on peut simplifier par a.
L'équation devient : $\boxed{\left(\mathbf{x} + \frac{\mathbf{b}}{\mathbf{2a}}\right)^{\mathbf{2}} - \frac{\Delta}{\mathbf{4a^2}} = 0}$

Tout dépend alors du signe de Δ :

- **Premier cas $\Delta < 0$:**
Alors : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{-\Delta}{4a^2}\right) > 0$ (car le premier terme étant le carré d'un nombre réel, il est positif ou nul et le second terme est strictement positif) donc **l'équation n'a pas de solution.**

- **Second cas $\Delta = 0$:**
L'équation devient : $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$ qui a pour solution : $x = -\frac{b}{2a}$. $\boxed{\mathscr{S} = \left\{x = -\frac{b}{2a}\right\}}$

- **Troisième cas $\Delta > 0$:**
  On a la différence de deux carrés donc on utilise la troisième identité remarquable :
  $\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[(x+\dfrac{b}{2a}+\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[(x+\dfrac{b}{2a}-\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right] = 0$
  $\Leftrightarrow \left[(x-\dfrac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right]\left[(x-\dfrac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right] = 0.$
  Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul : L'équation admet alors deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$. $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\,;\,\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}}$

Résumé :

Signe de Δ	Nombre de solutions	Solutions
$\Delta < 0$	pas de solution	$\mathscr{S} = \emptyset$
$\Delta = 0$	une solution	$\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{b}{2a}\right\}$
$\Delta > 0$	deux solutions	$\mathscr{S} = \left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\,;\,\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

Exemples d'application

1. Résoudre l'équation $3x^2+5x-2=0$.
   C'est une équation du type $ax^2+bx+c=0$ avec $a=3$, $b=5$ et $c=-2$.
   $\Delta = b^2-4ac = 5^2-4\times3\times(-2) = 25+24 = 49 > 0$.
   L'équation a donc deux solutions : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5-7}{6} = -2$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5+7}{6} = \dfrac{1}{3}$
   $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-2\,;\,\dfrac{1}{3}\right\}}$
2. Résoudre l'équation : $5x^2+x-3$.
   $\Delta = 1^2-4\times5\times(-3) = 61 > 0$.
   Comme $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions : $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\dfrac{-1-\sqrt{61}}{10}\,;\,\dfrac{-1+\sqrt{61}}{10}\right\}}$
3. Résoudre l'équation : $x^2+10x+25=0$.
   $\Delta = 10^2-4\times1\times25 = 0$ donc l'expression est en fait une identité remarquable.
   L'équation s'écrit : $(x+5)^2=0$ donc il n'y a qu'une solution : $\boxed{\mathscr{S} = \{-5\}}$
4. Soit l'équation : $x^2+x+1=0$.
   $\Delta = 1^2-4\times1\times1 = -3 < 0$.
   L'équation n'a pas de solution : $\boxed{\mathscr{S} = \emptyset}$

Remarque :

Lorsque $\Delta > 0$, l'équation $ax^2+bx+c=0$ a deux solutions $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2}$.

Alors, d'après la forme canonique, on a la factorisation : $\boxed{\mathbf{ax^2+bx+c = a\,(x-x_1)\,(x-x_2)}}$

III Signe de l'expression $ax^2 + bx + c$

On cherche le signe de $ax^2 + bx + c$ en fonction de x.
Pour cela, on va utiliser les résultats obtenus précédemment.

Trois cas se présentent :

- $\Delta < 0$
  La forme canonique est : $ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.
  Comme $\Delta < 0$, $-\dfrac{\Delta}{4a^2} > 0$; $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ donc $\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right] > 0$.
  L'expression $ax^2 + bx = c$ est donc du signe de a pour tout x.

  $\Delta = 0$
  Alors : $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$.
  Pour tout x, $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$ (nulle seulement pour $x = -\dfrac{b}{2a}$).
  L'expression est donc du signe de a, sauf en $-\dfrac{b}{2a}$, valeur pour laquelle l'expression s'annule.

  $\Delta = 0$
  On a vu que $ax^2 + bx + c$ s'annule pour deux valeurs x_1 et x_2.
  Alors : $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.
  Supposons que $x_1 < x_2$ et renseignons un tableau de signes :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
Signe de $x - x_1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
Signe de $x - x_2$		$-$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $a(x - x_1)\,x - x_2$		$+$	|	$-$	0	$+$	
Signe de $a(x - x_1)(x - x_2)$		Signe de a	0	Signe de $-a$	0	Signe de a	

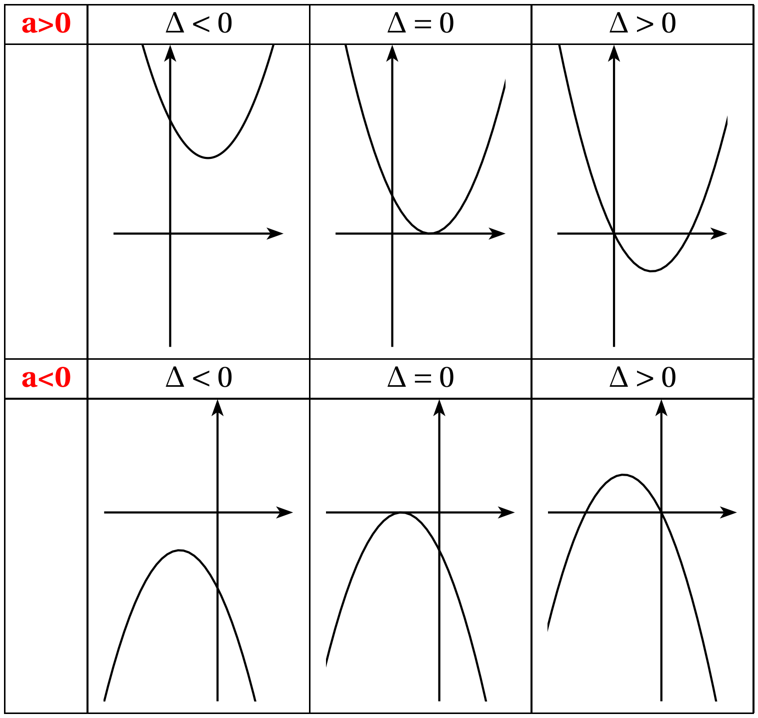
  On aurait les mêmes résultats avec $x_2 < x_1$ Conclusion :
  $ax^2 + bx + c$ est du signe de a à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines et du signe opposé à celui de a entre les racines.

Résumé :

- $\Delta < 0$: $ax^2 + bx + c$ est du signe de a.
- $\Delta = 0$: $ax^2 + bx + c$ est du signe de a sauf en $x = -\dfrac{b}{2a}$ où l'expression s'annule.
- $\Delta > 0$: $ax^2 + bx + c$ est du signe de a en dehors de l'intervalle formé par les racines et du signe opposé à celui de a entre les racines.

Interprétation graphique :.

Tu as vu en Seconde que la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ était une parabole.
Pour $a > 0$ elle est tournée vers le haut.
Pour $a < 0$ elle est tournée vers le bas.



IV Exercices d'entraînement

- Résoudre une équation du second degré dont les solutions peuvent être obtenues sans calculer le discriminant
- Résoudre une équation du second degré
- Résoudre une inéquation du second degré dont les racines associées peuvent être obtenues sans calculer le discrimi
- Résoudre une inéquation du second degré dont les racines associées peuvent être obtenues sans calculer le discrimi
- Résoudre une inéquation du second degré
-
- Résoudre une équation de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$ où a, b et c sont trois entiers relatifs
- Résoudre une inéquation du second degré
- Résoudre une inéquation de la forme P(x)>0, … où P est le produit de deux fonctions trinômes du second degré
- Etude du signe du produit de deux fonctions trinômes du second degré
- Résolution d'inéquations de la forme P(x)>0, … , où P est le produit de deux fonctions trinômes du second degré
- Résolution d'inéquations du second degré
- Signe d'une fonction trinôme du second degré
- Résolution d'équations du second degré