Pourcentages

Activité 1 pages 12 et 13

I Coefficient multiplicateur

Rappel : soit t un pourcentage ; calculer les t % d'un nombre x revient à calculer $x \times \dfrac{t}{100}$.

Exemple : 20 % de 25 vaut : $\dfrac{20}{100} \times 25 = 5$.

1) Propriété :

- Augmenter un nombre x de t% revient à le multiplier par $\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)$.
- Diminuer un nombre x de t% revient à le multiplier par $\left(1 - \dfrac{t}{100}\right)$.

Justification :

$x + x \times \dfrac{t}{100} = x \times \left(1 + \dfrac{t}{100}\right)$; $x \times \dfrac{t}{100} = x \times \left(1 - \dfrac{t}{100}\right)$

Exemples :

- Un objet vaut 12 €. Son prix augmente de 4 %. Son nouveau prix est $12 \times \left(1 + \dfrac{4}{100}\right) = 12 \times 1,04 = 12,48$ €.
- La population d'une ville était de 52000 habitants ; elle a diminué de 3 % en un an.
  Elle est alors égale à : $52000 \times \left(1 - \dfrac{3}{100}\right) = 52000 \times 0,97 = 50440$

2) Application

Supposons que l'on a deux nombres a et b avec $a < b$.

Le pourcentage d'augmentation pour passer de a à b est : $\dfrac{b-a}{a} \times 100$.

Justification : Si t est le pourcentage d'augmentation permettant de passer de a à b, on a : $b = \left(1 + \dfrac{t}{100}\right) \times a$ donc $1 + \dfrac{t}{100} = \dfrac{b}{a}$ d'où $\dfrac{\times}{100} = \dfrac{b}{a} - 1 = \dfrac{b-a}{a}$ et finalement : $t = \dfrac{b-a}{a} \times 100$.

Exemple : Voici le chiffre d'affaires d'un magasin :

Mois	janvier	juin	septembre
Chiffre d'affaires (en milliers d'euros)	13,5	7,1	14

1. Calculer le pourcentage d'évolution du chiffre d'affaires entre janvier et juin.
2. Calculer le pourcentage d'évolution du chiffre d'affaires entre juin et septembre.

Activité 2 :

Exercice 1

1. (a) Il valait 100 €. Après une augmentation de 2 %, il vaut $100 \times \left(1+\frac{2}{100}\right) = 100 \times 1,02 = 102$ €.

   (b) Son prix augmente alors de 3 %. Son prix fin 2000 est : $100 \times 1,02 \times \left(1+\frac{3}{100}\right) = 100 \times 1,02 \times 1,03 = 100 \times 1,0506 = 105,06$ €.

   (c) $1,0506 = \left(1+\frac{5,06}{100}\right)$; le pourcentag d'augmentation en 2000 a été de 5,06 %.

2. voir calculs précédents

Exercice 2

1. (a) Salaire net : 30 000 €.
   Sur la feuille d'impôts, on a :

Salaire	a : 30 000
Déduction 10 %	3 000
Reste lignes a-b	27 000
Abattement de 20 % (ligne c×20 %	540
Reste	2 160

   (b) Faux : les porcentages ne portent pas sur les même quantités.

2. (a) Cas général : ligne e : le montant est : $0,9 * 0,8 \times S$ car les coefficients multiplicateurs successifs sont $\left(1-\frac{10}{100}\right)$ et $\left(1-\frac{20}{100}\right)$.

   (b) Le coefficient multiplicateur global est : $0,9 * 0,8 = 0,72 = 1 - \frac{28}{100}$ donc le pourcentage de baisse est de 28 %.

Exercice 3

1. (a) Les deux coefficients multiplicateurs sont respectivement $\left(1+\frac{t}{100}\right)$ et $\left(1-\frac{t}{100}\right)$ donc $P_2 = \left(1+\frac{t}{100}\right)\left(1-\right.$

   (b) $\left(1+\frac{t}{100}\right)\left(1-\frac{t}{100}\right) = 1 - \frac{t^2}{10000} < 1$ donc $P_2 < P_0$.

2. Idem

3. (a) $P \times \left(1-\frac{15}{100}\right) \times \left(1+\frac{15}{100}\right) = P \times 0,85 * 1,15 = P \times 0,977\,5 < P$.

   (b) On doit avoir $0,85 \times \left(1+\frac{t}{100}\right) = 1$ donc $1 + \frac{t}{100} = \frac{1}{0,85}$ d'où $\frac{t}{100} = \frac{1}{0,85} - 1$: $t \approx 17,65$ %

II Évolutions successives

Exemple : En 2005, un objet avait un prix de 120 €. Son prix a augmenté en un an de 3 %. L'année suivante, son prix augmenté de 2 %.
Quel est son prix ?
En 2006, son prix vaut : $120 \times \left(1+\frac{3}{100}\right) = 120 \times 1,03 = 123,6$ €.
En 2007, son prix vaut : $120 \times 1,03 \times \left(1+\frac{2}{100}\right) = 120 \times 1,03 \times 1,02 = 126,072 \approx 126,7$ €.

Cas général

Soient $y_0, y_1, \dots y_n$ des nombres réels strictement positifs.
$y_1, y_2, \dots y_n$ sont les taux d'évolution successifs permettant de passer de y_1 à y_2, de y_2 à y_3, …, de y_{n-1} à y_n.

Le coefficient multiplicateur global permettant de passer de y_0 à y_n est le produit des n coefficients.

$1+T=(1+t_1)(1+t_2)\cdots(1+t_n)$ donc $\boxed{T=(1+t_1)(1+t_2)\cdots(1+t_n)-1}$.

Exercices page 26 : n^o 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 7 ; 8 ; 10 ; 13 ; 14 ; 19 ;20 ; 21

TD 4 et TD 5

Exercices page 28

n^o 30 ; 33 ; 34 ; 40 ; 41 ; 46 ; 47 ; 48

1) Indice en base 100

Exemple :

Le tableau ci-dessous donne la production de colza en France de 1992 à 2000. L'unité est le millier de tonnes.

année	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
production	1855	1587	1653	1425	1905	2013	2431	2324	2106

Nous allons dresser un nouveau tableau permettant d'avoir rapidement le pourcentage d'évolution pour chaque année par rapport à la première année, c'est-à-dire 1992.
On choisit cette année comme année de référence et on ramène à 100 la production de cette année-là.
On remplit les autres cases par proportionnalité.
Notons P_1 la production de la première année, I_1 l'indice correspondant (100), P la production d'une année et I l'indice correspondant.
On a alors : $\dfrac{I}{I_1}=\dfrac{P}{P_1}$, c'est-à-dire $\dfrac{I}{100}=\dfrac{P}{P_1}$ d'où : $\boxed{I=100\times\dfrac{P}{P_1}}$.
Le tableau devient :

année	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
Indice (arrondi à l'unité)	100	86	89	77	103	109	131	125	114

Utilité des indices :

Notons I et P l'indice et la production d'une année et I' et P' l'indice et la production d'une autre année.

On a : $\dfrac{I'}{100}=\dfrac{P'}{P_1}$ et $\dfrac{I}{100}=\dfrac{P}{P_1}$ d'où $\dfrac{\frac{P'}{P_1}}{\frac{P}{P_1}}=\dfrac{P'}{P}=\dfrac{\frac{I'}{100}}{\frac{I}{100}}=\dfrac{I'}{I}$ donc $\boxed{\dfrac{P'}{P}=\dfrac{I'}{I}}$

Supposons alors que $P'>P$ et notons t le pourcentage d'augmentation :
$t=\dfrac{P'-P}{P}\times 100=\left(\dfrac{P'}{P}-1\right)\times 100=\left(\dfrac{I'}{I}-1\right)\times 100=\dfrac{I'-I}{I}\times 100.$
Le pourcentage d'augmentation de la production est le même que le pourcentage d'augmentation des indices.
On a le même résultat si $P'<P$.

Par conséquent :

Le pourcentage d'évolution de la production est le même que le pourcentage d'évolution des indices

Par exemple, on voit facilement dans le tableau qu'entre 1992 et 1994, la production a baissé de 11 %
Entre 1992 et 2000, la production augmenté de 14 % (elle passe d'un indice 100 à un indice 114). On n'a donc pas besoin de connaître les vraies valeurs pour étudier les pourcentages d'évolution.