Correction du sujet A

I

Par définition, $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$.
Cette tangente passe par les points A$(3\,;\,1)$ et $B(1,2)$.
Son coefficient directeur est donc $\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{2-1}{1-3}==\dfrac{1}{-2}=-\dfrac{1}{2}$.

Par conséquent : $\boxed{f'(1)=-\dfrac{1}{2}}$.

II

1. $f(x)=3x^8$. Alors : $f'(x)=3\times 8x^7=24x^7$; $\boxed{f'(x)=24x^7}$.
2. $f(x)=\dfrac{1}{x^5}=\dfrac{1}{x^n}$ avec $n=5$. Alors : $f'(x)=-\dfrac{n}{x^{n+1}}=-\dfrac{5}{x^6}$; $\boxed{f'(x)=-\dfrac{5}{x^6}}$.
3. $f(x)=3x^2+5x-1$; $f'(x)=3\times 2x+5\times 1-0$ donc $\boxed{f'(x)=6x+5}$
4. $f(x)=\left(5x^2-4x+2\right)\sqrt{x}$.
   $f=uv$ avec $\begin{cases} u(x)=5x^2-4x+2 \\ v(x)=\sqrt{x}\end{cases}$.
   $f'=(uv)'=u'v+uv'$ avec $\begin{cases} u'(x)=5\times 2x+4\times 1+0=10x-4 \\ v'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\end{cases}$.
   Alors : $f'(x)=(10x-4)\sqrt{x}+\left(5x^2-4x+2\right)\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{(10x-4)\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}+\left(5x^2-4x+2\right)}{2\sqrt{x}}$
   $=\dfrac{(10x-4)\times 2x+5x^2-4x+2}{2\sqrt{x}}=\dfrac{20x^2-8x+5x^2-4x+2}{2\sqrt{x}}=\dfrac{25x^2-12x+2}{2\sqrt{x}}$
   $\boxed{f'(x)=\dfrac{25x^2-12x+2}{2\sqrt{x}}}$.
5. $f(x)=\dfrac{1}{3x^2+2x+7}$: $f=\dfrac{1}{u}$ avec $u(x)=3x^2+2x+7$.
   $f'=\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u'(x)=3\times 2x+2\times 1+0=6x+2$.
   Par conséquent : $\boxed{f'(x)=-\dfrac{6x+2}{\left(3x^2+2x+7\right)^2}}$.
6. $f(x)=\dfrac{5x+1}{3x+2}$ sur $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$.
   $f=\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x)=5x+1 \\ v(x)=3x+2\end{cases}$.
   Alors : $f'\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases} u'(x)=5 \\ v'(x)=3\end{cases}$.
   On en déduit que : $f'(x)=\dfrac{5(3x+2)-3(5x+1)}{(3x+2)^2}=\dfrac{7}{(3x+2)^2}$; $\boxed{f'(x)=\dfrac{7}{(3x+2)^2}}$.

III

$f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^3-1}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $a=-1$ est : $\boxed{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$ avec $a=-1$.
$f(-1)=0$.
Il faut calculer $f'(-1)$. Pour cela, on calcule $f'(x)$ et on remplace x par -1.
$f=\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x)=x^3+1 \\ v(x)=x^3-1\end{cases}$.
Alors : $f'\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $u'(x)=v'(x)=3x^2$.

On en déduit que : $f'(x) = \dfrac{3x^2(x^3-1) - 3x^2(x^3+1)}{(x^3+1)^2} = \dfrac{3x^2\left(x^3-1-(x^3+1)\right)}{(x^3-1)^2} = \boxed{\dfrac{-6x^2}{\left(x^3-1\right)^2}}$.

Par conséquent : $f'(-1) = \dfrac{-6}{(-2)^2} = -\dfrac{6}{4} = -\dfrac{3}{2}$.

Une équation de la tangente est donc : $y = -\dfrac{3}{2}(x-(-1)) + 0$, soit : $y = -\dfrac{3}{2}(x+1)$ d'où : $\boxed{y = -\dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}}$.

IV

$f(x) = -x^3 + 3x + 1$.

1. $f'(x) = -3x^2 + 3 = 3(1-x^2) = 3(1+x)(1-x)$.
2. $f'(x) = 0$ pour $x = -1$ ou $x = 1$.
   Pour étudier le signe de $f'(x)$, on renseigne un tableau de signes, en remarquant que $f'(x)$ est du signe de $(1+x)(1-x)$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $1+x$		$-$	0	$+$	0	$+$	
Signe de $1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   On en déduit que f est décroissante sur $]-\infty\,;\,-1]$ et sur $[1\,;\,+\infty[$, et croisssante sur $[-1\,;\,1]$.
   Tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	

V

La fonction coût est donnée par $C(q) = 0,02q^3 - 16,2q^2 + 5\ 000q$.

1. Chaque unité étant vendue 2 970€, la recette est : $R(q) = 2\ 970q$.
2. Le bénéfice est alors : $B(q) = R(q) - C(q) = 2\ 970q - \left(0,02q^3 - 16,2q^2 + 5\ 000q\right) = -0,02q^3 + 16,2q^2 - 2\ 030q$.
3. Pour qu'il y ait rentabilité de l'entreprise, le bénéfice doit être positif.
   $B(q) = q(-0,02q^2 + 16,2q - 2\ 030)$. $-0,02q^2 + 16,2q - 2\ 030$ est une expression du second degré. Calculons ses racines.
   $\Delta = 16,2^2 - 4 \times (-0,02) \times (-2\ 030) = 100,04 > 0$.
   Les deux racines sont alors $q_1 = \dfrac{-16,2 + \sqrt{100,04}}{-2 \times 0,02} = \dfrac{16,2 - \sqrt{100,04}}{0,04} \approx 154,9$ et $q_2 = \dfrac{16,2 + \sqrt{100,04}}{0,04} \approx 655,04$.
   $-0,02q^2 + 16,2q - 2\ 030$ est positif (donc du signe opposé au coefficient de q^2 qui est -0,02) entre les racines, donc pour q variant entre 155 et 655 objets produits.
4. La dérivée de B vaut : $B'(q) = -0,02 \times 3q^2 + 16,2 \times 2q - 2\ 030 \times 1$ donc $\boxed{B'(q) = -0,06q^2 + 32,4q - 2\ 030}$.
   Résolvons l'équation : $B'(q) = 0$.
   $\Delta = 32,4^2 - 4 \times (-0,06) \times (-2\ 030) = 562,56 > 0$.
   Il y a deux racines, qui sont :
   $q_3 = \dfrac{-32,4 + \sqrt{562,56}}{-0,12} = \dfrac{32,4 - \sqrt{562,56}}{0,12} \approx 72,3$ et $q_4 = \dfrac{32,4 + \sqrt{562,56}}{0,12} \approx 827,98$.
   $B'(q)$ est positif (du signe opposé à -0,06) entre les racines et négatif à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines.
   On en déduit que B est une fonction décroissante sur $[0\,;\,q_3]$ et sur $[q_4\,;\,3\infty[$ et croissante sur $[q_3\,;\,q_4]$.
   Le tableau de variations est le suivant :

q	0		q_3		q_4		$+\infty$
$B'(q)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$B(q)$		$\searrow$	$B(q_3)$	$\nearrow$	$B(q_4)$	$\searrow$	

   $\boxed{\text{Le bénéfice maximum a donc lieu pour une production d'environ 828 objets}}$.

Correction du sujet B

I

Par définition, $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$.
Cette tangente passe par les points A(3 ; 1) et $B(1,2)$.
Son coefficient directeur est donc $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2-1}{1-3} == \dfrac{1}{-2} = -\dfrac{1}{2}$.

Par conséquent : $\boxed{f'(1) = -\dfrac{1}{2}}$.

II

1. $f(x) = 2x^7$. Alors : $f'(x) = 2 \times 7x^6 = 14x^6$; $\boxed{f'(x) = 14x^6}$.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^6} = \dfrac{1}{x^n}$ avec $n = 6$. Alors : $f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}} = -\dfrac{6}{x^7}$; $\boxed{f'(x) = -\dfrac{6}{x^7}}$.
3. $f(x) = 4x^2 - 7x + 2$; $f'(x) = 4 \times 2x - 7 \times 1 + 0$ donc $\boxed{f'(x) = 8x - 7}$
4. $f(x) = \left(3x^2 - 5x + 3\right)\sqrt{x}$.
   $f = uv$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x^2 - 5x + 3 \\ v(x) = \sqrt{x} \end{cases}$.
   $f' = (uv)' = u'v + uv'$ avec $\begin{cases} u'(x) = 3 \times 2x - 5 \times 1 + 0 = 6x - 5 \\ v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$.
   Alors : $f'(x) = (6x-5)\sqrt{x} + \left(3x^2 - 5x + 3\right) \times \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{(6x-5)\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + \left(3x^2 - 5x + 3\right)}{2\sqrt{x}}$
   $= \dfrac{(6x-5) \times 2x + 3x^2 - 5x + 3}{2\sqrt{x}} = \dfrac{12x^2 - 10x + 3x^2 - 5x + 3}{2\sqrt{x}} = \dfrac{15x^2 - 15x + 3}{2\sqrt{x}}$
   $\boxed{f'(x) = \dfrac{15x^2 - 15x + 3}{2\sqrt{x}}}$.
5. $f(x) = \dfrac{1}{2x^2 + 3x + 5}$: $f = \dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = 2x^2 + 3x + 5$.
   $f' = \left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u'(x) = 2 \times 2x + 3 \times 1 + 0 = 4x + 3$.
   Par conséquent : $\boxed{f'(x) = -\dfrac{4x+3}{\left(3x^2 + 2x + 7\right)^2}}$.
6. $f(x) = \dfrac{3x-4}{2x+3}$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$.
   $f = \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = 3x - 4 \\ v(x) = 2x + 3 \end{cases}$.
   Alors : $f'\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases} u'(x) = 3 \\ v'(x) = 2 \end{cases}$.
   On en déduit que : $f'(x) = \dfrac{3(2x+3) - 2(3x-4)}{(2x+3)^2} = \dfrac{17}{(2x+3)^2}$; $\boxed{f'(x) = \dfrac{17}{(2x+3)^2}}$.

III

$f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^3-1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.
L'équation réduite de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $a = -1$ est : $\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$ avec $a = -1$.
$f(-1) = 0$.
Il faut calculer $f'(-1)$. Pour cela, on calcule $f'(x)$ et on remplace x par -1.
$f = \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x^3 + 1 \\ v(x) = x^3 - 1 \end{cases}$.
Alors : $f'\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = v'(x) = 3x^2$.

On en déduit que : $f'(x)=\dfrac{3x^2(x^3-1)-3x^2(x^3+1)}{(x^3+1)^2}=\dfrac{3x^2\left(x^3-1-(x^3+1)\right)}{(x^3-1)^2}=\boxed{\dfrac{-6x^2}{\left(x^3-1\right)^2}}$.

Par conséquent : $f'(-1)=\dfrac{-6}{(-2)^2}=-\dfrac{6}{4}=-\dfrac{3}{2}$.

Une équation de la tangente est donc : $y=-\dfrac{3}{2}(x-(-1))+0$, soit : $y=-\dfrac{3}{2}(x+1)$ d'où : $\boxed{y=-\dfrac{3}{2}x-\dfrac{3}{2}}$.

IV

$f(x)=-x^3+3x+1$.

1. $f'(x)=-3x^2+3=3(1-x^2)=3(1+x)(1-x)$.
2. $f'(x)=0$ pour $x=-1$ ou $x=1$.
   Pour étudier le signe de $f'(x)$, on renseigne un tableau de signes, en remarquant que $f'(x)$ est du signe de $(1+x)(1-x)$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $1+x$		$-$	0	$+$	0	$+$	
Signe de $1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   On en déduit que f est décroissante sur $]-\infty\,;\,-1]$ et sur $[1\,;\,+\infty[$, et croisssante sur $[-1\,;\,1]$.
   Tableau de variations :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	

V

La fonction coût est donnée par $C(q)=0{,}02q^3-16{,}2q^2+5\ 000q$.

1. Chaque unité étant vendue 2 970€, la recette est : $R(q)=2\ 970q$.
2. Le bénéfice est alors : $B(q)=R(q)-C(q)=2\ 970q-\left(0{,}02q^3-16{,}2q^2+5\ 000q\right)=-0{,}02q^3+16{,}2q^2-2\ 030q$.
3. Pour qu'il y ait rentabilité de l'entreprise, le bénéfice doit être positif.
   $B(q)=q(-0{,}02q^2+16{,}2q-2\ 030)$. $-0{,}02q^2+16{,}2q-2\ 030$ est une expression du second degré. Calculons ses racines.
   $\Delta=16{,}2^2-4\times(-0{,}02)\times(-2\ 030)=100{,}04>0$.
   Les deux racines sont alors $q_1=\dfrac{-16{,}2+\sqrt{100{,}04}}{-2\times 0{,}02}=\dfrac{16{,}2-\sqrt{100{,}04}}{0{,}04}\approx 154{,}9$ et $q_2=\dfrac{16{,}2+\sqrt{100{,}04}}{0{,}04}\approx 655{,}04$.
   $-0{,}02q^2+16{,}2q-2\ 030$ est positif (donc du signe opposé au coefficient de q^2 qui est -0,02) entre les racines, donc pour q variant entre 155 et 655 objets produits.
4. La dérivée de B vaut : $B'(q)=-0{,}02\times 3q^2+16{,}2\times 2q-2\ 030\times 1$ donc $\boxed{B'(q)=-0{,}06q^2+32{,}4q-2\ 030}$.
   Résolvons l'équation : $B'(q)=0$.
   $\Delta=32{,}4^2-4\times(-0{,}06)\times(-2\ 030)=562{,}56>0$.
   Il y a deux racines, qui sont :
   $q_3=\dfrac{-32{,}4+\sqrt{562{,}56}}{-0{,}12}=\dfrac{32{,}4-\sqrt{562{,}56}}{0{,}12}\approx 72{,}3$ et $q_4=\dfrac{32{,}4+\sqrt{562{,}56}}{0{,}12}\approx 827{,}98$.
   $B'(q)$ est positif (du signe opposé à -0,06) entre les racines et négatif à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines.
   On en déduit que B est une fonction décroissante sur $[0\,;\,q_3]$ et sur $[q_4\,;\,3\infty[$ et croissante sur $[q_3\,;\,q_4]$.
   Le tableau de variations est le suivant :

q	0		q_3		q_4		$+\infty$
$B'(q)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$B(q)$		$\searrow$	$B(q_3)$	$\nearrow$	$B(q_4)$	$\searrow$	

   $\boxed{\text{Le bénéfice maximum a donc lieu pour une production d'environ 828 objets}}$.