1^{re} ES/L : correction du contrôle sur les équations du second degré

I — 3 points

Résoudre les équations suivantes :

a) $\frac{1}{2}x^2 - x + 2 = 0$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times 2 = 1 - 4 = -3 < 0$. L'équation n'a pas de solution.. $\boxed{\mathscr{S} = \emptyset}$

b) $3x^2 + 5x - 8 = 0$

$\Delta = 5^2 - 4 \times 3 \times (-8) = 25 + 96 = 121 > 0$.

L'équation a deux solutions :

$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{121}}{2 \times 3} = \frac{-5 - 11}{6} = -\frac{16}{6} = -\frac{8}{3}$

$x_2 = \frac{-5 + 11}{6} = 1$.

$\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{8}{3} ; 1\right\}}$

II — 7 points

Résoudre les équations suivantes :

a) $3x + 2 = 5x^2 \Leftrightarrow 5x^2 - 3x - 2 = 0$ (en transposant tout à droite)..

$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 5 \times (-2) = 49 > 0$.

L'équation a deux solutions : $x_1 = \frac{3 - 7}{10} = -\frac{2}{5}$ et $x_2 = \frac{3 + 7}{10} = 1$.

$\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{2}{5} ; 1\right\}}$.

b) $x^2 = 5x \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow x(x - 5) = 0$ en factorisant.

Un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

L'ensemble des solutions est donc $\boxed{\mathscr{S} = \{0 ; 5\}}$.

c) $3x^2 = -7$.

Pour tout x, $3x^2 \geqslant 0$ et $-7 < 0$ donc il n'y a aucune veleur possible de x pour que l'égalité soit vraie :

$\boxed{\mathscr{S} = \emptyset}$.

d) $x^2 + 3 = x \Leftrightarrow x^2 - x + 3 = 0$.

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 3 = -11 < 0$. Il n'y a pas de solutions :

$\boxed{\mathscr{S} = \emptyset}$.

e) $2\left(x^2 - 1\right) = 3x \Leftrightarrow 2x^2 - 2 - 3x = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$.

$\Delta = 25 > 0$. L'équation a deux solutions :

$x_1 = \frac{3 - 5}{2 \times 2} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ et $x_2 = \frac{3 + 5}{4} = 2$.

$\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\frac{1}{2} ; 2\right\}}$.

III — 3 points

Résoudre les deux inéquations suivantes :

1. $3x^2 + x + 7 > 0$

Le discriminant vaut :

$\Delta = 1^2 - 4 \times 3 \times 7 = 1 - 84 = -83 < 0$.

L'expression $3x^2 + x + 7$ est donc du signe de 3 (coefficient de x^2) pour tout x.

Tableau de signes :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$3x^2 + x + 7$	$+$

L'ensemble des solutions de l'inéquation est

$\boxed{\mathscr{S} = \mathbb{R}}$.

2. $x^2 - 2x - 3 > 0$

Le discriminant vaut :

$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$.

Il y a deux racines :

$x_1 = \frac{2 - \sqrt{16}}{2} = -1$ et $x_2 = \frac{2 + \sqrt{16}}{2} = 3$.

Le coefficient de x^2 est 1, positif.

On en déduit le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x^2 - 2x - 3$		$+$	0	$-$	0	$+$	

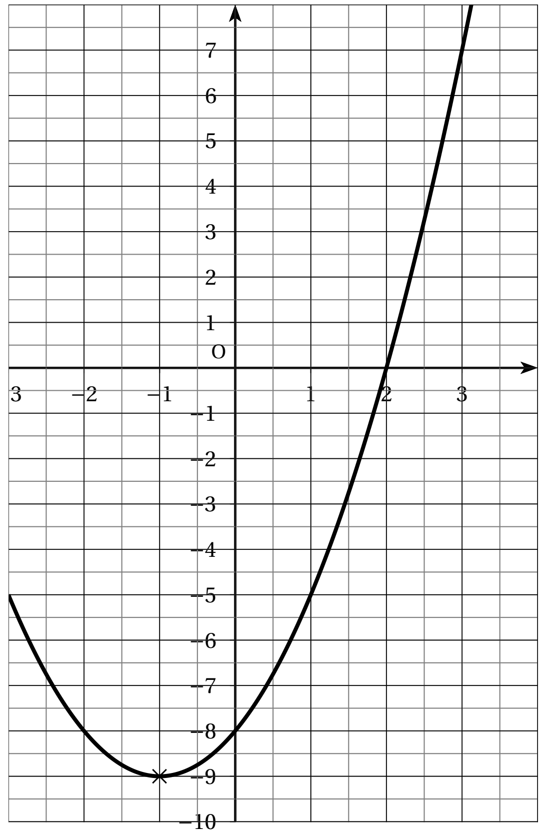
L'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$\boxed{\mathscr{S} =]-\infty ; -1[\cup]3 ; +\infty[}$.

IV **4 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

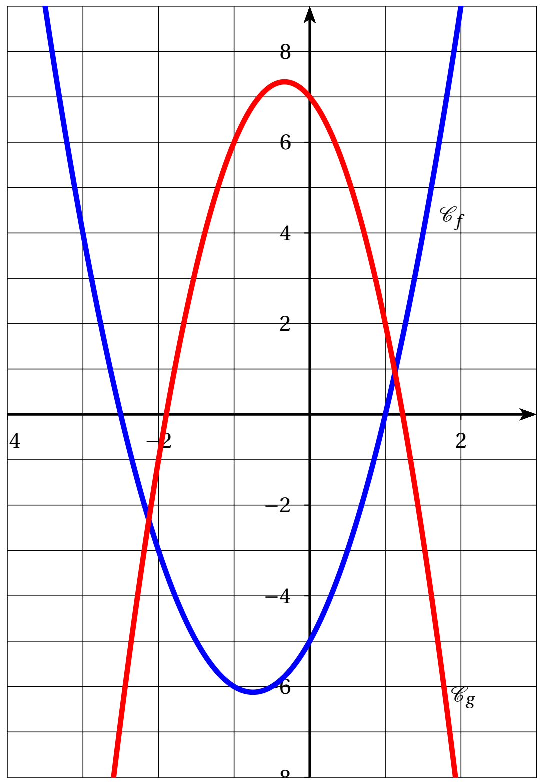
$$f(x) = x^2 + 2x - 8.$$



1. Le sommet S a pour coordonnées $\boxed{S(-1\,;\,-9)}$.
   Une solution de l'équation $f(x) = 0$ est 2.
2. La droite d'équation $x = -1$ est axe de symétrie de la parabole. Si a est l'autre solution de l'équation $f(x) = 0$, on a : $\dfrac{a+2}{2} = -1$ don $a + 2 = -2$ d'où $\boxed{a = -4}$.
3. Résolvons l'équation $f(x) = 0$, c'est-à-dire $x^2 + 2x - 8 = 0$.
   $\Delta = 36 > 0$. L'équation a deux solutions.
   $x_1 = \dfrac{-2-\sqrt{36}}{2} = -4$ et $x_2 = \dfrac{-2+\sqrt{36}}{2} = 2$.
   On retrouve les solutions trouvées précédemment.

V **3 points**

Ci-dessous sont représentées graphiquement les fonctions $f : x \mapsto 2x^2 + 3x - 5$ et $g : x \mapsto -3x^2 - 2x + 7$ par les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.



Les abscisses **exactes** des deux points d'intersection de ces deux courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$.

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 5 = -3x^2 - 2x + 7 \Leftrightarrow 5x^2 + 5x - 12 = 0$.

$\Delta = 5^2 - 4 \times 5 \times (-12) = 25 + 240 = 265 > 0$. Les deux solutions sont $\boxed{\dfrac{-5-\sqrt{265}}{10}}$ et $\boxed{\dfrac{-5+\sqrt{265}}{10}}$